Corrections
ou éléments de réponses
des exercices de deuxième année

Table des matières

2.1 Géométrie 2D : norme, produit scalaire et déterminant

♡ **Exercice 174 : géométrie 2D - périmètre, aire et angle** (6 fois 5 minutes)

1. Soit $A(1;2)$, $B(2;5)$ et $C(4;6)$ trois points.
   Calculer l'angle β du triangle ABC.

   Correction

   L'angle β est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Ainsi

   $$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\binom{-1}{-3} \bullet \binom{2}{1}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Donc $\beta = 135°$.

2. Soit $A(0;4)$, $B(-1;2)$ et $C(1;-2)$ trois points.
   Calculer l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle ABC.

   Correction

   L'angle $\widehat{ABC}$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Ainsi

   $$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\binom{1}{2} \bullet \binom{2}{-4}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-6}{5\sqrt{4}} = -\frac{3}{5}$$

   Donc $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3. Soit $A(6;4)$, $B(5;-1)$ et $C(3;-2)$ trois points.
   Calculer l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ABC.

   Correction

   L'angle $\widehat{ACB}$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$. Ainsi

   $$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{\binom{3}{6} \bullet \binom{2}{1}}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}} = \frac{12}{5\sqrt{9}} = \frac{4}{5}$$

   Donc $\widehat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$.

4. Soit $A(5;4)$, $B(4;9)$ et $C(7;7)$ trois points.

   Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

   Correction

   Le périmètre est égal à

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| &= \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \sqrt{26} + \sqrt{13} + \sqrt{13} \end{aligned}$$

   On a choisi dans cet ordre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$, car leur somme vaut $\binom{0}{0}$.
   Ce qui permet d'avoir une vérification !

   L'aire signée vaut $\dfrac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{2} = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-13}{2}$. Donc l'aire vaut $\dfrac{13}{2}$.

5. Soit $A(6;-1)$, $B(3;6)$ et $C(8;4)$ trois points.

   Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

   Correction

   Le périmètre est égal à

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| &= \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \sqrt{58} + \sqrt{29} + \sqrt{29} \end{aligned}$$

   On a choisi dans cet ordre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$, car leur somme vaut $\binom{0}{0}$.
   Ce qui permet d'avoir une vérification !

   L'aire signée vaut $\dfrac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{2} = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-29}{2}$. Donc l'aire vaut $\dfrac{29}{2}$.

6. Soit $A(2;5)$, $B(3;8)$ et $C(4;6)$ trois points.

   Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

   Correction

   Le périmètre est égal à

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| &= \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{5} \end{aligned}$$

   On a choisi dans cet ordre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$, car leur somme vaut $\binom{0}{0}$.
   Ce qui permet d'avoir une vérification !

   L'aire signée vaut $\dfrac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{2} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-5}{2}$. Donc l'aire vaut $\dfrac{5}{2}$.

Résolution de l'exercice 175

1. Si les vecteurs sont perpendiculaires, l'angle entre ces deux vecteurs est droit, donc le cosinus de cet angle est nul et ainsi le produit scalaire est nul.

   Réciproquement, si le produit scalaire est nul, alors le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs est nul, donc cet angle est droit.

   Les deux implications sont basées sur la formule $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}}$

2. Si les vecteurs sont parallèles, le parallélogramme qu'ils engendrent est d'aire nulle, donc le déterminant est nul.

   Réciproquement, si le déterminant est nul, alors l'aire du parallélogramme est nulle, donc il est tout plat, et les vecteurs qui l'engendrent sont parallèles.

   Les deux implications sont basées sur la formule $\boxed{\text{aire signée} = \det(\vec{v}, \vec{w})}$

Remarque. Le vecteur nul $\vec{0} = \binom{0}{0}$ est perpendiculaire et parallèle à tous les autres vecteurs.

2.2 Résolution d'équations avec exponentielles et logarithmes

2.3 Équations trigonométriques

♡ **Exercice 177 : équations trigonométriques** (6 fois 5 minutes)

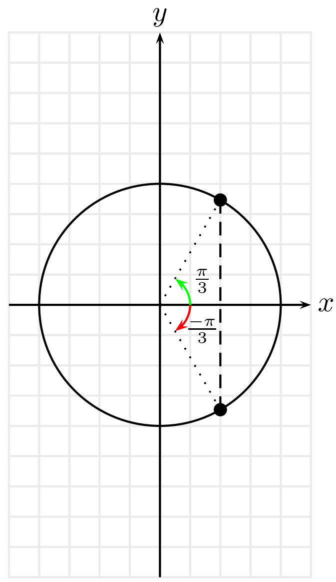
1. Trouver l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $\cos(2x+5) = \frac{1}{2}$.

Correction

$\iff$ $2x + 5 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
ou $2x + 5 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff$ $2x = -5 + \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
ou $2x = -5 - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$$S = \left\{ \pm\frac{\pi}{6} - \frac{5}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$$



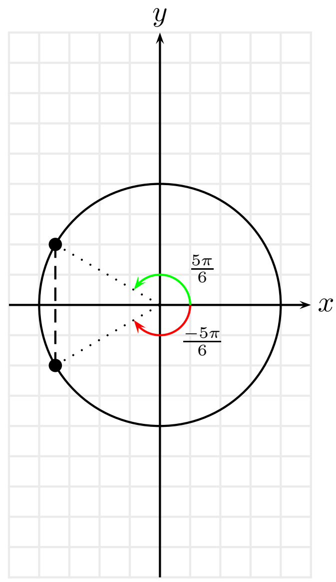
2. Trouver l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $\cos(3x-4) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction

$\iff$ $3x - 4 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$
ou $3x - 4 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff$ $3x = 4 + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$
ou $3x = 4 - \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$$S = \left\{ \pm\frac{5\pi}{18} + \frac{4}{3} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$



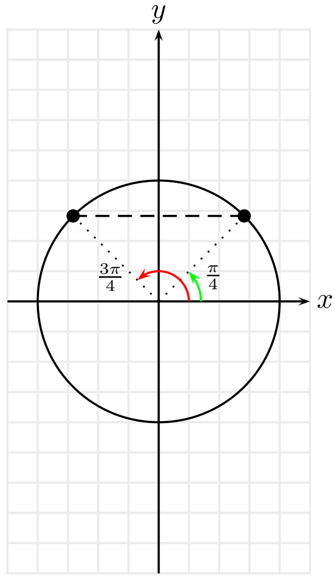
3. Trouver l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $\sin(5x+2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction

$$\Longleftrightarrow \quad 5x+2 = \tfrac{\pi}{4} + 2\pi k$$
$$\text{ou} \quad 5x+2 = \tfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 5x = -2 + \tfrac{\pi}{4} + 2\pi k$$
$$\text{ou} \quad 5x = -2 + \tfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{20} - \frac{2}{5} + \frac{2\pi k}{5}, \ \frac{3\pi}{20} - \frac{2}{5} + \frac{2\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$



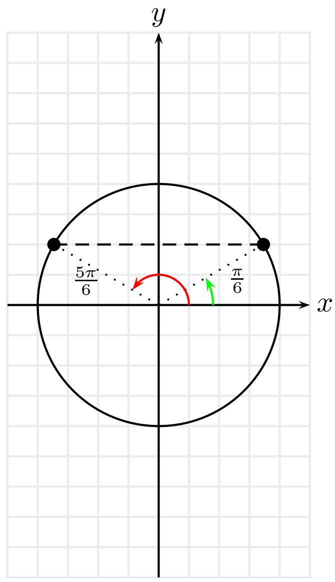
4. Trouver l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $\sin(3x-1) = \frac{1}{2}$.

Correction

$$\Longleftrightarrow \quad 3x-1 = \tfrac{\pi}{6} + 2\pi k$$
$$\text{ou} \quad 3x-1 = \tfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3x = 1 + \tfrac{\pi}{6} + 2\pi k$$
$$\text{ou} \quad 3x = 1 + \tfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \ \frac{5\pi}{18} + \frac{1}{3} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$



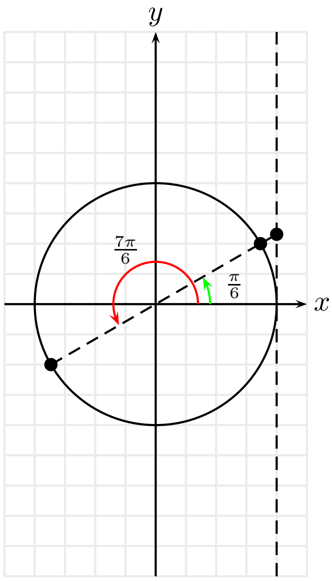
5. Trouver l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $\tan(4x+1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction

$\iff \quad 4x + 1 = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff \quad 4x = -1 + \frac{\pi}{6} + \pi k$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$



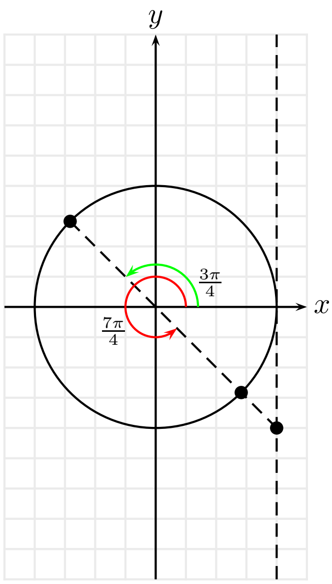
6. Trouver l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $\tan(4x-3) = -1$.

Correction

$\iff \quad 4x - 3 = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff \quad 4x = 3 + \frac{3\pi}{4} + \pi k$

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{16} + \frac{3}{4} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Résolution de l'exercice 178

a) On procède comme à l'OB15. Sur le schéma, on remarque que des demi-tours suffisent (k demi-tours correspondent à πk). Ainsi $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) En divisant chaque membre de l'équation par 2 et en simplifiant la racine carrée, on obtient l'équation $\tan(5x-2) = \sqrt{3}$ que l'on résout comme à l'OB15. On obtient $S = \left\{\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) C'est une équation du deuxième degré camouflée.

$$4\left(\sin(x)\right)^2 - 8\sin(x) + 3 = 0 \underset{\Delta=64-48=16}{\overset{\text{Viète}}{\iff}} \sin(x) = \frac{8 \pm 4}{8} = \frac{2 \pm 1}{2} = \frac{3}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

L'équation $\sin(x) = \frac{3}{2}$ n'admet pas de solutions (car $\sin(x) \in [-1,1]$), il reste à résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ comme à l'OB15. On obtient $S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Deux approches sont possibles :

(a) Soit on divise par $\cos(x)$ de chaque côté de l'équation pour obtenir $\tan(x) = 1$ que l'on résout comme à l'OB15.

(b) Soit on dessine le schéma et la droite $y = x$ (la diagonale à 45°). Les points sur le cercle sont à l'intersection du cercle et de cette droite.

Quelle que soit l'approche, on trouve $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) On pourrait utiliser la méthode de l'équation du deuxième degré camouflée si on avait deux cosinus ou deux sinus dans l'équation. En se souvenant de l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on remarque qu'on peut remplacer $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$. L'équation devient ainsi

$$2\left(1 - \cos^2(x)\right) - \cos(x) - 1 = 0 \iff -2\left(\cos(x)\right)^2 - \cos(x) + 1 = 0$$

On voit une équation du deuxième degré camouflée qu'on résout par Viète, on trouve

$$\cos(x) = -1 \text{ ou } \tfrac{1}{2}$$

On résout ces deux équations trigonométriques comme à l'OB15, mais en observant le schéma attentivement, on voit qu'on peut passer d'un point à l'autre en faisant des tiers de tours (k tiers de tours correspondent à $\frac{2\pi k}{3}$). On trouve $S = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

f) Comme au point précédent, on peut remplacer $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$ afin de transformer l'équation qui devient

$$4\cos^3(x) - 8\cos^2(x) - \cos(x) + 2 = 0$$

On peut factoriser par paire (comme dans certains exercices de l'OB5).

$$4\cos^2(x)\big(\cos(x) - 2\big) - \big(\cos(x) - 2\big) = 0 \iff \big(4\cos^2(x) - 1\big)\big(\cos(x) - 2\big) = 0$$
$$\iff 4\big(\cos(x) - \tfrac{1}{2}\big)\big(\cos(x) + \tfrac{1}{2}\big)\big(\cos(x) - 2\big) = 0$$

Grâce à la propriété du produit, il reste à résoudre $\cos(x) = \pm\frac{1}{2}$ (puisque $\cos(x) = 2$ n'a pas de solutions).

On résout ces équations trigonométriques comme à l'OB15, mais en observant le schéma attentivement, on voit qu'on peut écrire l'ensemble de solution à l'aide de demi-tours.

On trouve $S = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

La dernière équation montre que l'on pourrait aussi devoir utiliser Gauss & Horner pour résoudre des équations similaires.

Résolution de l'exercice 179

Graphiquement, on voit qu'il n'y a qu'un point d'intersection.

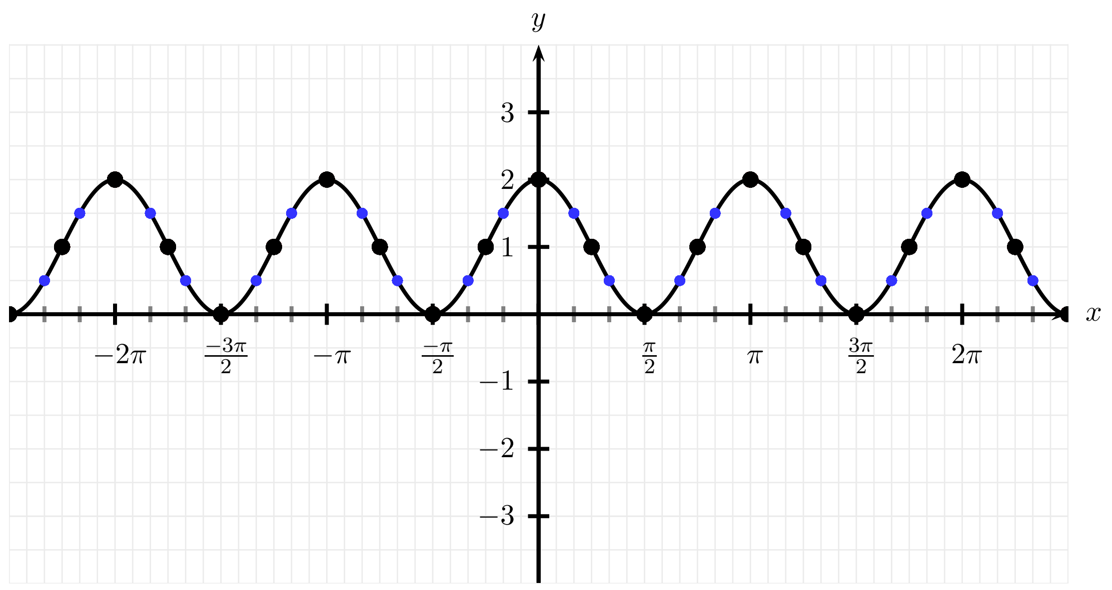
On peut tâtonner pour trouver environ 0.739, mais il y a plus élégant !

On choisit un nombre (peu importe). On calcule le cosinus de ce nombre, puis le cosinus du nombre obtenu, encore et encore... on s'approche ainsi de 0.739 environ.

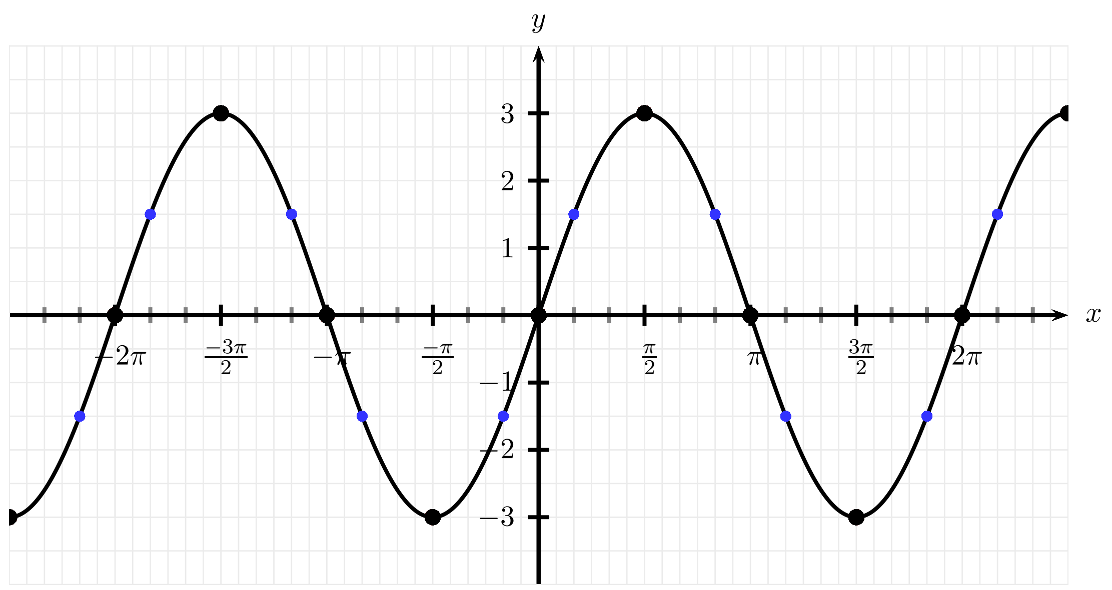
2.4 Graphes de fonctions trigonométriques

♡ **Exercice 180 : graphes de fonctions trigonométriques** (3 fois 5 minutes)

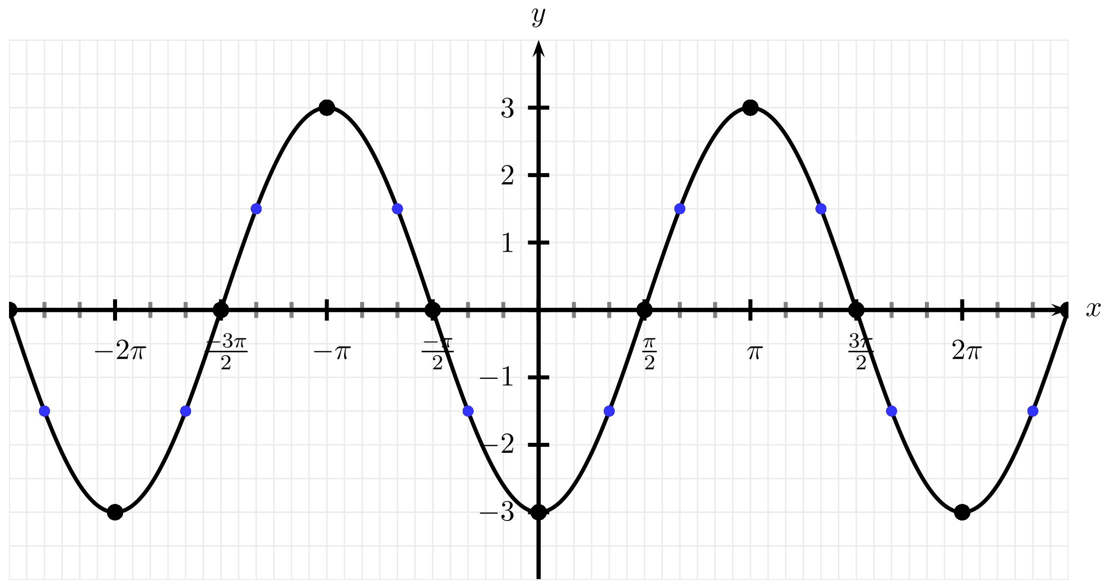
1. Dessiner le graphe de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(2x) + 1$.



2. Dessiner le graphe de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3\cos(x - \frac{\pi}{2})$.

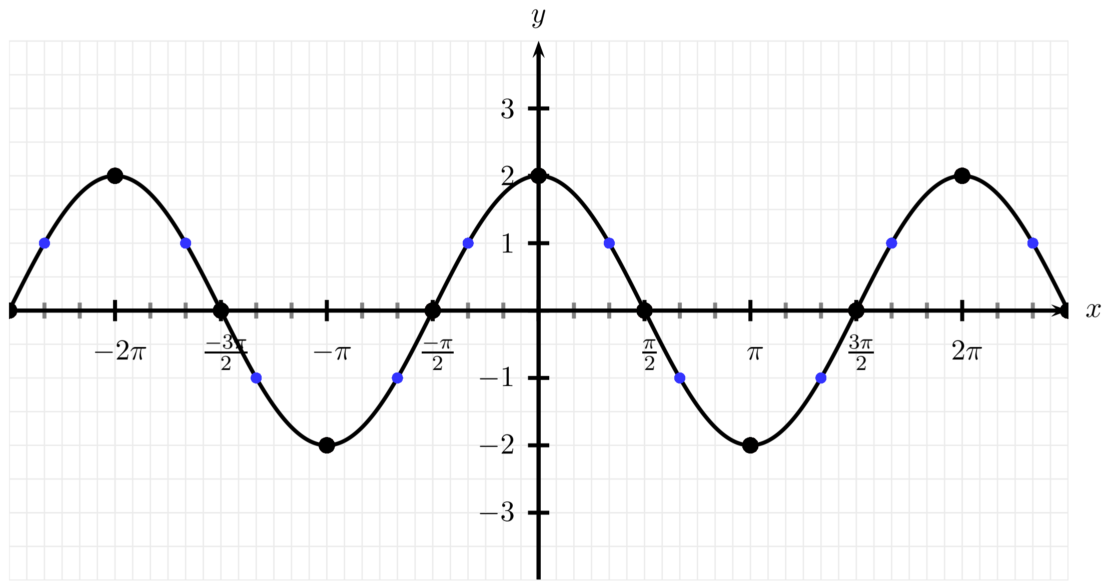


3. Dessiner le graphe de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3\sin(x - \frac{\pi}{2})$.

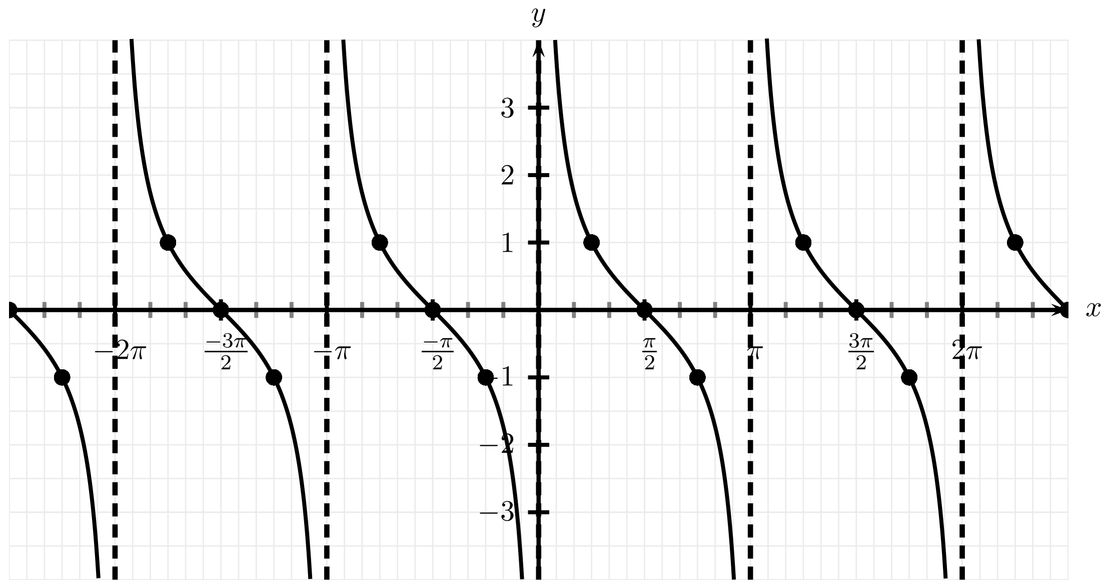


♡ **Exercice 181 : graphes de fonctions trigonométriques** (3 fois 5 minutes)

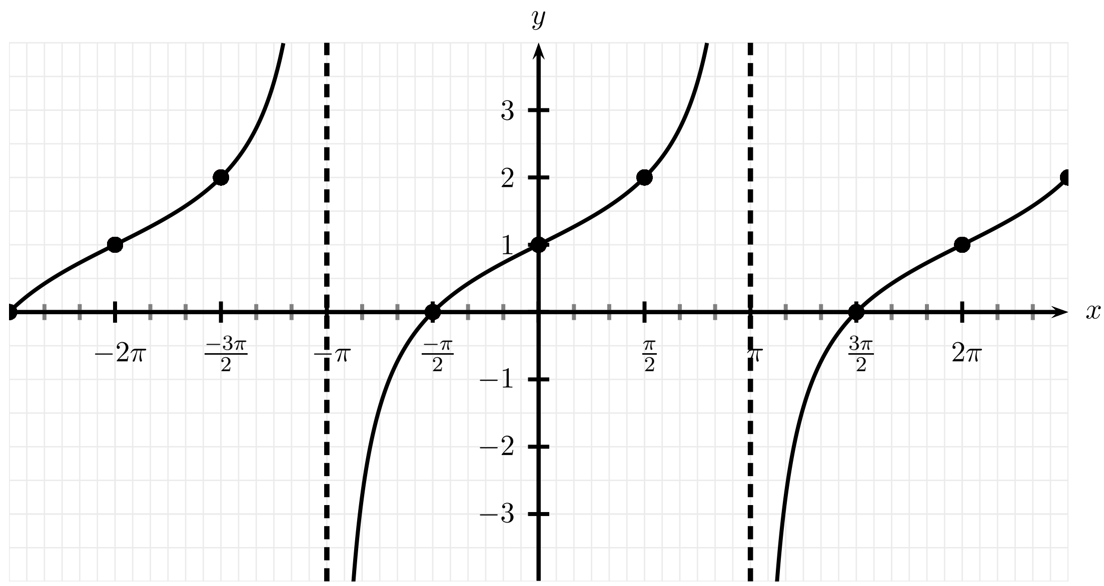
1. Dessiner le graphe de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{2})$.



2. Dessiner le graphe de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$.



3. Dessiner le graphe de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(\frac{1}{2}x) + 1$.



2.5 Trigonométrie : formules d'additions des angles

Résolution de l'exercice 182

Les réponses sont dans le QuickQuiz.

Résolution de l'exercice 183

a) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

b) $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

c) $\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)\big(\cos^2(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\big)$

d) $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)\big(3\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big)$

On peut facilement montrer qu'en a), on peut aussi écrire $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$.

Résolution de l'exercice 184

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

b) $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$

e) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

f) $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

Résolution de l'exercice 185

On a $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ et $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

2.6 Analyse : comportement des fonctions rationnelles

♡ **Exercice 186 : comportement asymptotique local et à l'infini** (6 fois 5 minutes)

1. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{3x^3 + 8x + 2}{3(x-1)(x-2)}$$

Correction

Domaine de définition de f : $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Son bord est $\partial D = \{\pm\infty, 1, 2\}$.

Comportement local

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \overset{(\frac{13}{0})}{=} \pm\infty \implies$ AV : $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \overset{(\frac{42}{0})}{=} \pm\infty \implies$ AV : $x = 2$

Comportement à l'infini

Le degré du numérateur $(= 3)$ vaut un de plus que celui du dénominateur $(= 2)$, donc la fonction a une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \tfrac{3}{3} = 1$$

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - 1x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 + 8x + 2 - 1x \cdot 3(x^2 - 3x + 2)}{3(x^2 - 3x + 2)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x^2 + 2x + 2}{3(x^2 - 3x + 2)} = \frac{9}{3} = 3 \implies \text{AO} : y = x + 3$$

2. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{2(x-1)^2(x+2)}$$

Correction

Domaine de définition de f : $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$. Son bord est $\partial D = \{\pm\infty, 1, -2\}$.

Comportement local

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \overset{(\frac{-9}{0})}{=} \pm\infty \implies$ AV : $x = 1$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-4)}{2(x-1)^2\cancel{(x+2)}} \overset{(\frac{-6}{18})}{=} -\frac{1}{3} \implies$ trou en $(-2; -\frac{1}{3})$

Comportement à l'infini

Le degré du numérateur $(= 2)$ est plus petit que celui du dénominateur $(= 3)$, donc la fonction a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{2(x+1)}$$

Correction

Domaine de définition de f : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Son bord est $\partial D = \{\pm\infty, -1\}$.

Comportement local

$$\lim_{x \to -1} f(x) \overset{(\frac{11}{0})}{=} \pm\infty \implies \text{AV} : x = -1$$

Comportement à l'infini

Le degré du numérateur $(= 2)$ vaut un de plus que celui du dénominateur $(= 1)$, donc la fonction a une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \tfrac{2}{2} = 1$$

$$h = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - 1x\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 4x + 5 - 1x \cdot 2(x+1)}{2(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5 - 6x}{2(x+1)} = \frac{-6}{2} = -3 \implies \text{AO} : y = x - 3$$

4. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{4x^3 - 7x + 3}{3(x-2)^2(x-1)}$$

Correction

Domaine de définition de f : $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 1\}$. Son bord est $\partial D = \{\pm\infty, 2, 1\}$.

Comportement local

$$\lim_{x \to 2} f(x) \overset{(\frac{21}{0})}{=} \pm\infty \implies \text{AV} : x = 2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(4x^2 + 4x - 3)}{3(x-2)^2\cancel{(x-1)}} \overset{(\frac{5}{3})}{=} \frac{5}{3} \implies \text{trou en } (1; \tfrac{5}{3})$$

Comportement à l'infini

Le degré du numérateur $(= 3)$ est égal à celui du dénominateur $(= 3)$, donc la fonction a une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{4}{3}$.

5. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{6x^4 + 5x^2 + 1}{3x^2(x-1)}$$

Correction

Domaine de définition de f : $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Son bord est $\partial D = \{\pm\infty, 0, 1\}$.

Comportement local

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{(\frac{1}{0})}{=} \pm\infty \implies \text{AV} : x = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{(\frac{12}{0})}{=} \pm\infty \implies \text{AV} : x = 1$$

Comportement à l'infini

Le degré du numérateur $(= 4)$ vaut un de plus que celui du dénominateur $(= 3)$, donc la fonction a une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \tfrac{6}{3} = 2$$

$$h = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^4 + 5x^2 + 1 - 2x \cdot 3(x^3 - x^2)}{3(x^3 - x^2)}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 + 1}{3(x^3 - x^2)} = \frac{6}{3} = 2 \implies \text{AO} : y = 2x + 2$$

6. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{3x^4 + x^2 - 4}{2(x-2)^4(x-1)}$$

Correction

Domaine de définition de f : $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 1\}$. Son bord est $\partial D = \{\pm\infty, 2, 1\}$.

Comportement local

$$\lim_{x \to 2} f(x) \overset{(\frac{48}{0})}{=} \pm\infty \implies \text{AV} : x = 2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(3x^3 + 3x^2 + 4x + 4)}{2(x-2)^4\cancel{(x-1)}} \overset{(\frac{14}{2})}{=} 7 \implies \text{trou en } (1; 7)$$

Comportement à l'infini

Le degré du numérateur $(= 4)$ est plus petit que celui du dénominateur $(= 5)$, donc la fonction a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2.7 Analyse : définition de la dérivée

♡ **Exercice 187 : définition de la dérivée** (5 fois 5 minutes)

1. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = 3x^2 + 4x + 7$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) + 7 \ - \ (3x^2+4x+7)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(6x + 3\Delta x + 4\Big)$$

$$= 6x + 4$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{3x_1^2 + 4x_1 + 7 \ - \ (3x^2+4x+7)}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{3(x_1-x)(x_1+x) + 4(x_1-x)}{(x_1-x)}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \Big(3(x_1+x) + 4\Big)$$

$$= 6x + 4$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

2. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = 2x^3 - 7x + 5$.

   Rappel : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3 - 7(x+\Delta x) + 5 \ - \ (2x^3-7x+5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 7\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(6x^2 + 6x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 7\Big)$$

$$= 6x^2 - 7$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{2x_1^3 - 7x_1 + 5 \ - \ (2x^3-7x+5)}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{2(x_1-x)(x_1^2 + x_1x + x^2) \ - \ 7(x_1-x)}{(x_1-x)}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \Big(2(x_1^2 + x_1x + x^2) - 7\Big)$$

$$= 6x^2 - 7$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

3. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{2x+7}{3x}$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2(x+\Delta x)+7}{3(x+\Delta x)} - \dfrac{2x+7}{3x}}{\Delta x} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{\dfrac{2x_1+7}{3x_1} - \dfrac{2x+7}{3x}}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x(x+\Delta x)+7x - \big(2x(x+\Delta x)+7(x+\Delta x)\big)}{3x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{2x_1x+7x-\big(2x_1x+7x_1\big)}{3x_1x} \cdot \frac{1}{x_1-x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-7 \cdot \cancel{\Delta x}}{3x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{-7 \cdot \cancel{(x_1 - x)}}{3x_1x} \cdot \frac{1}{\cancel{x_1 - x}}$$

$$= \frac{-7}{3x^2} \qquad = \frac{-7}{3x^2}$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

4. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{4}{3x+7}$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{4}{3(x+\Delta x)+7} - \dfrac{4}{3x+7}}{\Delta x} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{\dfrac{4}{3x_1+7} - \dfrac{4}{3x+7}}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(3x+7)-4(3x+3\Delta x+7)}{\big(3(x+\Delta x)+7\big)\big(3x+7\big)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{4(3x+7)-4(3x_1+7)}{\big(3x_1+7\big)\big(3x+7\big)} \cdot \frac{1}{x_1-x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-12 \cdot \cancel{\Delta x}}{\big(3(x+\Delta x)+7\big)\big(3x+7\big)} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{-12 \cdot \cancel{(x_1 - x)}}{\big(3x_1+7\big)\big(3x+7\big)} \cdot \frac{1}{\cancel{x_1 - x}}$$

$$= \frac{-12}{(3x+7)^2} \qquad = \frac{-12}{(3x+7)^2}$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

5. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{2x+7}$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+7} - \sqrt{2x+7}}{\Delta x} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{\sqrt{2x_1+7} - \sqrt{2x+7}}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)+7 - (2x+7)}{\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+7} + \sqrt{2x+7}\right) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{2x_1+7 - (2x+7)}{\left(\sqrt{2x_1+7} + \sqrt{2x+7}\right) \cdot (x_1 - x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cancel{\Delta x}}{\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+7} + \sqrt{2x+7}\right) \cdot \cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{2 \cdot \cancel{(x_1 - x)}}{\left(\sqrt{2x_1+7} + \sqrt{2x+7}\right) \cdot \cancel{(x_1 - x)}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+7}} = \frac{1}{\sqrt{2x+7}} \qquad = \frac{2}{2\sqrt{2x+7}} = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

♡ **Exercice 188 : définition de la dérivée** (5 fois 5 minutes)

1. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) + 2 - (5x^2 - 7x + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{5x_1^2 - 7x_1 + 2 - (5x^2 - 7x + 2)}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 7\Delta x}{\Delta x} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{5(x_1 - x)(x_1 + x) - 7(x_1 - x)}{(x_1 - x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(10x + 5\Delta x - 7\Big) \qquad = \lim_{x_1 \to x} \Big(5(x_1 + x) - 7\Big)$$

$$= 10x - 7 \qquad = 10x - 7$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

2. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = 4x^3 + 3x + 7$.

   Rappel : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x)^3 + 3(x+\Delta x) + 7 \; - \; (4x^3 + 3x + 7)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{4x_1^3 + 3x_1 + 7 \; - \; (4x^3 + 3x + 7)}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 + 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{4(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) \; + \; 3(x_1 - x)}{(x_1 - x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Big(12x^2 + 12x \cdot \Delta x + 4(\Delta x)^2 + 3\Big) \qquad = \lim_{x_1 \to x} \Big(4(x_1^2 + x_1 x + x^2) + 3\Big)$$

$$= 12x^2 + 3 \qquad = 12x^2 + 3$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

3. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{3x-1}{7x}$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{3(x+\Delta x) - 1}{7(x+\Delta x)} - \dfrac{3x-1}{7x}}{\Delta x} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{\dfrac{3x_1 - 1}{7x_1} - \dfrac{3x-1}{7x}}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x(x+\Delta x) - x - \big(3x(x+\Delta x) - (x+\Delta x)\big)}{7x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{3x_1 x - x - \big(3x_1 x - x_1\big)}{7x_1 x} \cdot \frac{1}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 \cdot \cancel{\Delta x}}{7x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{1 \cdot \cancel{(x_1 - x)}}{7x_1 x} \cdot \frac{1}{\cancel{x_1 - x}}$$

$$= \frac{1}{7x^2} \qquad = \frac{1}{7x^2}$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

4. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{6}{7x-5}$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{6}{7(x+\Delta x)-5} - \dfrac{6}{7x-5}}{\Delta x} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{\dfrac{6}{7x_1-5} - \dfrac{6}{7x-5}}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6(7x-5) - 6(7x+7\Delta x-5)}{\big(7(x+\Delta x)-5\big)\big(7x-5\big)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{6(7x-5) - 6(7x_1-5)}{\big(7x_1-5\big)\big(7x-5\big)} \cdot \frac{1}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-42 \cdot \cancel{\Delta x}}{\big(7(x+\Delta x)-5\big)\big(7x-5\big)} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{-42 \cdot \cancel{(x_1 - x)}}{\big(7x_1-5\big)\big(7x-5\big)} \cdot \frac{1}{\cancel{x_1 - x}}$$

$$= \frac{-42}{(7x-5)^2} \qquad = \frac{-42}{(7x-5)^2}$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

5. À l'aide de la définition de la dérivée, calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{7x-3}$.

Correction

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{7(x+\Delta x)-3} - \sqrt{7x-3}}{\Delta x} \qquad = \lim_{x_1 \to x} \frac{\sqrt{7x_1-3} - \sqrt{7x-3}}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x+\Delta x)-3 - (7x-3)}{\big(\sqrt{7(x+\Delta x)-3} + \sqrt{7x-3}\big) \cdot \Delta x}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{7x_1-3 - (7x-3)}{\big(\sqrt{7x_1-3} + \sqrt{7x-3}\big) \cdot (x_1 - x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7 \cdot \cancel{\Delta x}}{\big(\sqrt{7(x+\Delta x)-3} + \sqrt{7x-3}\big) \cdot \cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{7 \cdot \cancel{(x_1 - x)}}{\big(\sqrt{7x_1-3} + \sqrt{7x-3}\big) \cdot \cancel{(x_1 - x)}}$$

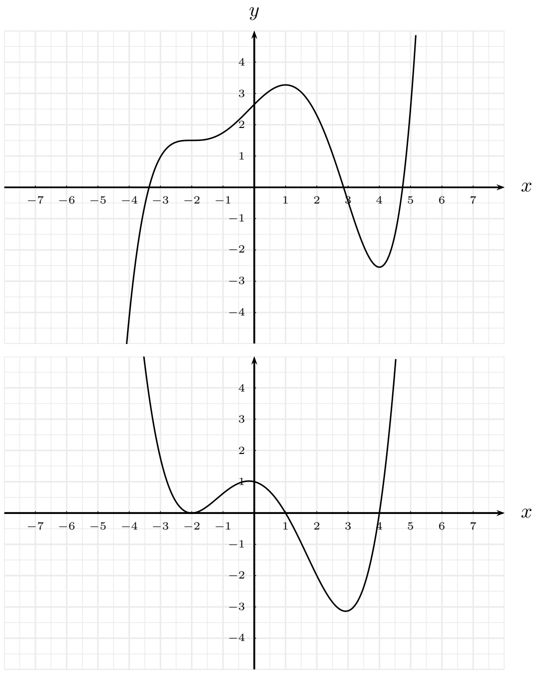
$$= \frac{7}{2\sqrt{7x-3}} \qquad = \frac{7}{2\sqrt{7x-3}}$$

Vérifier la réponse en utilisant les règles de dérivation (de tête).

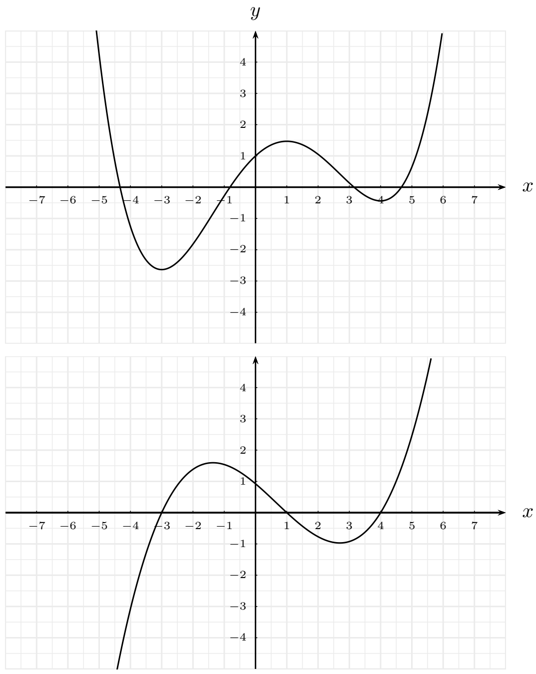
2.8 Analyse : graphe de la dérivée d'une fonction

♡ Exercice 189 : graphe de la dérivée d'une fonction (4 fois 5 minutes)

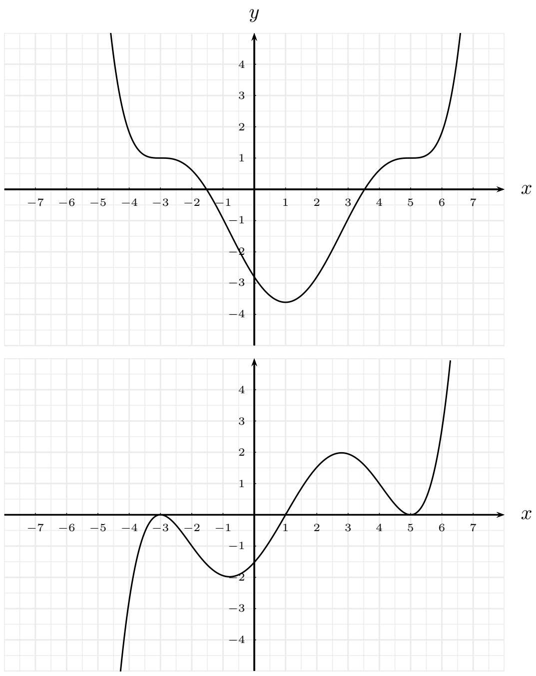
a) Voici le graphe d'une fonction.
Dessiner le graphe de sa dérivée sur le repère en dessous.



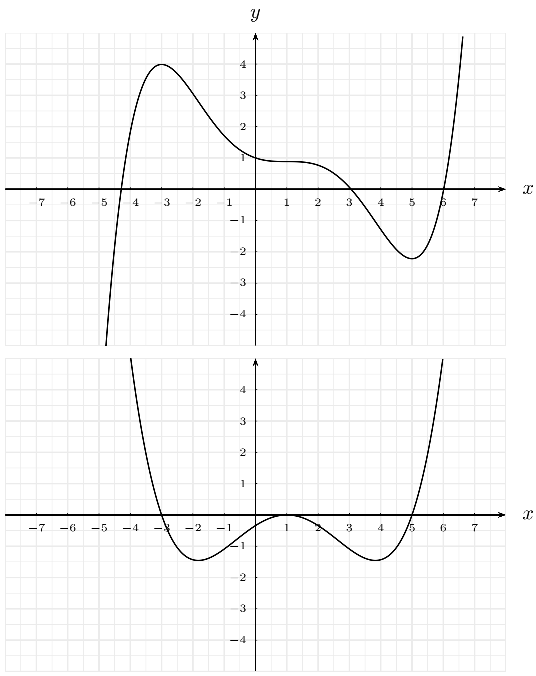
b) Voici le graphe d'une fonction.
Dessiner le graphe de sa dérivée sur le repère en dessous.



c) Voici le graphe d'une fonction.
Dessiner le graphe de sa dérivée sur le repère en dessous.



d) Voici le graphe d'une fonction.
Dessiner le graphe de sa dérivée sur le repère en dessous.



2.9 Analyse : dérivée et équation de la tangente

♡ Exercice 190 : équation de tangentes à une fonction (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 2x^4 + 3x^3$ en $x = -2$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = 8x^3 + 9x^2$.

La tangente est de pente $f'(-2) = -28$ et passe par le point $\big(-2; f(-2)\big) = (-2; 8)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = y_0 + m(x - x_0)$.

$(x_0; y_0)$ est un point quelconque de la tangente, puisque l'équation est vérifiée si on remplace x par x_0 et y par y_0. Ainsi, on peut choisir $x_0 = -2$ et $y_0 = f(x_0) = 8$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(-2) = -28$.

Ainsi l'équation de la tangente est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff y = 8 - 28(x + 2) \iff y = -28x - 48$$

♡ Exercice 191 : équation de tangentes à une fonction (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = (3 - 5x)^4$ en $x = 1$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = 4(3 - 5x)^3 \cdot (-5) = -20(3 - 5x)^3$.

La tangente est de pente $f'(1) = 160$ et passe par le point $\big(1; f(1)\big) = (1; 16)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(1) = 160$.

h est la hauteur de la tangente. Comme $(1; 16)$ est un point de la tangente, on peut trouver h en remplaçant x par 1 et y par 16.

$$16 = m \cdot 1 + h \overset{m=160}{\iff} 16 = 160 + h \iff h = -144$$

Ainsi l'équation de la tangente est $y = 160x - 144$.

♡ **Exercice 192 : équation de tangentes à une fonction** (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{3-5x}$ en $x = 2$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = -\dfrac{1}{(3-5x)^2} \cdot (-5) = \dfrac{5}{(3-5x)^2}$.

La tangente est de pente $f'(2) = \frac{5}{49}$ et passe par le point $\big(2; f(2)\big) = (2; -\frac{1}{7})$.

Méthode choisie : utilisation de la géométrie plane.

Point de la tangente : $(2; -\frac{1}{7})$.

Vecteur directeur de la tangente : $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{49} \end{pmatrix}$, puisque la pente vaut $\frac{5}{49}$.

Vecteur normal de la tangente : $\begin{pmatrix} -\frac{5}{49} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Équation cartésienne de la tangente : $-\frac{5}{49}x + y = -\frac{10}{49} - \frac{1}{7} = -\frac{17}{49}$.

Ainsi l'équation de la tangente est $y = \frac{5}{49}x - \frac{17}{49}$.

♡ **Exercice 193 : équation de tangentes à une fonction** (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 4\sqrt{5x+4}$ en $x = 1$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = \dfrac{10}{\sqrt{5x+4}}$.

La tangente est de pente $f'(1) = \frac{10}{3}$ et passe par le point $\big(1; f(1)\big) = (1; 12)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = y_0 + m(x - x_0)$.

$(x_0; y_0)$ est un point quelconque de la tangente, puisque l'équation est vérifiée si on remplace x par x_0 et y par y_0. Ainsi, on peut choisir $x_0 = 1$ et $y_0 = f(x_0) = 12$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(1) = \frac{10}{3}$.

Ainsi l'équation de la tangente est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff y = 12 + \tfrac{10}{3}(x-1) \iff y = \tfrac{10}{3}x + \tfrac{26}{3}$$

♡ **Exercice 194 : équation de tangentes à une fonction** (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 3e^{2x}$ en $x = \ln(3)$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

Dérivée : $f'(x) = 3 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}$.

La tangente est de pente $f'(\ln(3)) = 54$ et passe par $(\ln(3); f(\ln(3))) = (\ln(3); 27)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(\ln(3)) = 54$.

h est la hauteur de la tangente. Comme $(\ln(3); 27)$ est un point de la tangente, on peut trouver h en remplaçant x par $\ln(3)$ et y par 27.

$$27 = m \cdot \ln(3) + h \overset{m=54}{\iff} 27 = 54\ln(3) + h \iff h = 27 - 54\ln(3)$$

Ainsi l'équation de la tangente est $y = 54x + 27 - 54\ln(3)$.

♡ **Exercice 195 : équation de tangentes à une fonction** (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 4\ln(x^2)$ en $x = e^3$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{8}{x}$.

La tangente est de pente $f'(e^3) = \frac{8}{e^3}$ et passe par le point $\big(e^3; f(e^3)\big) = (e^3; 24)$.

Méthode choisie : utilisation de la géométrie plane.

Point de la tangente : $(e^3; 24)$.

Vecteur directeur de la tangente : $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{e^3} \end{pmatrix}$, puisque la pente vaut $\frac{8}{e^3}$.

Vecteur normal de la tangente : $\begin{pmatrix} -\frac{8}{e^3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Équation cartésienne de la tangente : $-\frac{8}{e^3}x + y = -\frac{8}{e^3}e^3 + 24 = 16$.

Ainsi l'équation de la tangente est $y = \frac{8}{e^3}x + 16$.

♡ **Exercice 196 : équation de tangentes à une fonction** (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 2\sin(6x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

Dérivée : $f'(x) = 2 \cdot \cos(6x) \cdot 6 = 12\cos(6x)$.

La tangente est de pente $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$ et passe par le point $\big(\frac{\pi}{4}; f\big(\frac{\pi}{4}\big)\big) = \big(\frac{\pi}{4}; -2\big)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = y_0 + m(x - x_0)$.

$(x_0; y_0)$ est un point quelconque de la tangente, puisque l'équation est vérifiée si on remplace x par x_0 et y par y_0. Ainsi, on peut choisir $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y_0 = f(x_0) = -2$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Ainsi l'équation de la tangente est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\iff \quad y = -2 + 0(x - \tfrac{\pi}{4}) \iff \quad y = -2$$

♡ **Exercice 197 : équation de tangentes à une fonction** (5 minutes)

Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 3\cos(5x)$ en $x = \frac{\pi}{3}$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

Dérivée : $f'(x) = 3 \cdot (-\sin(5x)) \cdot 5 = -15\sin(5x)$.

La tangente est de pente $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ et passe par le point $\big(\frac{\pi}{3}; f\big(\frac{\pi}{3}\big)\big) = \big(\frac{\pi}{3}; \frac{3}{2}\big)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

h est la hauteur de la tangente. Comme $(\frac{\pi}{3}; \frac{3}{2})$ est un point de la tangente, on peut trouver h en remplaçant x par $\frac{\pi}{3}$ et y par $\frac{3}{2}$.

$$\tfrac{3}{2} = m \cdot \tfrac{\pi}{3} + h \quad \overset{m = \frac{15\sqrt{3}}{2}}{\iff} \quad \tfrac{3}{2} = \tfrac{5\sqrt{3}\pi}{2} + h \iff \quad h = \tfrac{3}{2} - \tfrac{5\sqrt{3}\pi}{2}$$

Ainsi l'équation de la tangente est $y = \frac{15\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}\pi}{2}$.

♡ **Exercice 198 : équation de tangentes à une fonction** (8 fois 5 minutes)

1. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 3x^4 + 2x^2$ en $x = -1$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = 12x^3 + 4x$.

La tangente est de pente $f'(-1) = -16$ et passe par le point $\big(-1; f(-1)\big) = (-1; 5)$.

Méthode choisie : utilisation de la géométrie plane.

Point de la tangente : $(-1; 5)$.

Vecteur directeur de la tangente : $\begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}$, puisque la pente vaut -16.

Vecteur normal de la tangente : $\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Équation cartésienne de la tangente : $16x + y = -11$.

Ainsi l'équation de la tangente est $y = -16x - 11$.

2. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = (3x + 5)^4$ en $x = -1$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = 4(3x + 5)^3 \cdot 3 = 12(3x + 5)^3$.

La tangente est de pente $f'(-1) = 96$ et passe par le point $\big(-1; f(-1)\big) = (-1; 16)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = y_0 + m(x - x_0)$.

$(x_0; y_0)$ est un point quelconque de la tangente, puisque l'équation est vérifiée si on remplace x par x_0 et y par y_0. Ainsi, on peut choisir $x_0 = -1$ et $y_0 = f(x_0) = 16$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(-1) = 96$.

Ainsi l'équation de la tangente est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff y = 16 + 96(x + 1) \iff y = 96x + 112$$

3. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{3x+5}$ en $x = -1$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) \;=\; -\dfrac{1}{(3x+5)^2} \cdot 3 \;=\; \dfrac{-3}{(3x+5)^2}$.

La tangente est de pente $f'(-1) = -\frac{3}{4}$ et passe par le point $\big(-1; f(-1)\big) = (-1; \frac{1}{2})$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(-1) = -\frac{3}{4}$.

h est la hauteur de la tangente. Comme $(-1; \frac{1}{2})$ est un point de la tangente,
on peut trouver h en remplaçant x par -1 et y par $\frac{1}{2}$.

$$\tfrac{1}{2} = m \cdot (-1) + h \overset{m=-\frac{3}{4}}{\iff} \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} + h \iff h = -\tfrac{1}{4}$$

Ainsi l'équation de la tangente est $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

4. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 2\sqrt{5x-1}$ en $x = 2$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{5x-1}}$.

La tangente est de pente $f'(2) = \frac{5}{3}$ et passe par le point $\big(2; f(2)\big) = (2; 6)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(2) = \frac{5}{3}$.

h est la hauteur de la tangente. Comme $(2; 6)$ est un point de la tangente,
on peut trouver h en remplaçant x par 2 et y par 6.

$$6 = m \cdot 2 + h \overset{m=\frac{5}{3}}{\iff} 6 = \tfrac{10}{3} + h \iff h = \tfrac{8}{3}$$

Ainsi l'équation de la tangente est $y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}$.

5. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 5e^{2x}$ en $x = \ln(2)$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

Dérivée : $f'(x) = 5 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 10e^{2x}$.

La tangente est de pente $f'(\ln(2)) = 40$ et passe par $(\ln(2); f(\ln(2))) = (\ln(2); 20)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = y_0 + m(x - x_0)$.

$(x_0; y_0)$ est un point quelconque de la tangente, puisque l'équation est vérifiée si on remplace x par x_0 et y par y_0. Ainsi, on peut choisir $x_0 = \ln(2)$ et $y_0 = f(x_0) = 20$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(\ln(2)) = 40$.

Ainsi l'équation de la tangente est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\iff y = 20 + 40(x - \ln(2)) \iff y = 40x + 20 - 40\ln(2)$$

6. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 5\ln(x^3)$ en $x = e^2$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

La dérivée est $f'(x) = 5 \cdot \dfrac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \dfrac{15}{x}$.

La tangente est de pente $f'(e^2) = \frac{15}{e^2}$ et passe par le point $\big(e^2; f(e^2)\big) = (e^2; 30)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(e^2) = \frac{15}{e^2}$.

h est la hauteur de la tangente. Comme $(e^2; 30)$ est un point de la tangente, on peut trouver h en remplaçant x par e^2 et y par 30.

$$30 = m \cdot e^2 + h \overset{m=\frac{15}{e^2}}{\iff} 30 = 15 + h \iff h = 15$$

Ainsi l'équation de la tangente est $y = \frac{15}{e^2}x + 15$.

7. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 3\sin(7x)$ en $x = \frac{\pi}{6}$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

Dérivée : $f'(x) = 3 \cdot \cos(7x) \cdot 7 = 21\cos(7x)$.

La tangente est de pente $f'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{21\sqrt{3}}{2}$ et passe par le point $\left(\frac{\pi}{6}; f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}; -\frac{3}{2}\right)$.

Méthode choisie : utilisation de la géométrie plane.

Point de la tangente : $(\frac{\pi}{6}; -\frac{3}{2})$.

Vecteur directeur de la tangente : $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{21\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, puisque la pente vaut $-\frac{21\sqrt{3}}{2}$.

Vecteur normal de la tangente : $\begin{pmatrix} \frac{21\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Équation cartésienne de la tangente : $\frac{21\sqrt{3}}{2}x + y = \frac{7\sqrt{3}\pi}{4} - \frac{3}{2}$.

Ainsi l'équation de la tangente est $y = -\frac{21\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{7\sqrt{3}\pi}{4}$.

8. Établir l'équation de la tangente à la fonction $f(x) = 2\cos(7x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$ en expliquant rigoureusement la démarche utilisée (il y a au moins trois façons de faire).

Correction

Dérivée : $f'(x) = 2 \cdot (-\sin(7x)) \cdot 7 = -14\sin(7x)$.

La tangente est de pente $f'(\frac{\pi}{4}) = 7\sqrt{2}$ et passe par le point $\left(\frac{\pi}{4}; f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$.

Méthode choisie : l'équation de la tangente est de la forme $y = y_0 + m(x - x_0)$.

$(x_0; y_0)$ est un point quelconque de la tangente, puisque l'équation est vérifiée si on remplace x par x_0 et y par y_0. Ainsi, on peut choisir $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y_0 = f(x_0) = \sqrt{2}$.

m est la pente de la tangente, car c'est le coefficient de x lorsque y est isolé.
Donc $m = f'(\frac{\pi}{4}) = 7\sqrt{2}$.

Ainsi l'équation de la tangente est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\iff y = \sqrt{2} + 7\sqrt{2}(x - \tfrac{\pi}{4}) \iff y = 7\sqrt{2}x + \sqrt{2} - \tfrac{7\sqrt{2}\pi}{4}$$

2.10 Analyse : factorisation de dérivées (avec les règles)

♡ **Exercice 199 : dérivation à l'aide des règles** (10 fois 5 minutes)

1. À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de $f(x) = \dfrac{(x^3-2)^2}{(x^2-2)^3}$.

   On peut s'arrêter de factoriser dès que cela suffit pour faire un tableau de signes

   Correction

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\cdot\ (x^3-2)\ \cdot(3x^2)\ \cdot\ (x^2-2)^3\ -\ (x^3-2)^2\ \cdot\ 3\cdot\ (x^2-2)^2\ \cdot(2x)}{(x^2-2)^6}\\
&= \frac{(x^3-2)\left(2\cdot\ 1\ \cdot(3x^2)\cdot\ (x^2-2)\ -\ 3\cdot\ (x^3-2)\ \cdot\ 1\ \cdot(2x)\right)}{(x^2-2)^4}\\
&= \frac{(x^3-2)\left(-12x^2+12x\right)}{(x^2-2)^4}\\
&= \frac{(x^3-2)\ \cdot(-12x)\cdot(x-1)}{(x^2-2)^4}
\end{aligned}$$

2. À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de $f(x) = \dfrac{(12x^2-1)^2}{4x-1}$.

   On peut s'arrêter de factoriser dès que cela suffit pour faire un tableau de signes

   Correction

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\cdot\ (12x^2-1)\ \cdot(24x)\ \cdot\ (4x-1)\ -\ (12x^2-1)^2\ \cdot\ (4)}{(4x-1)^2}\\
&= \frac{(12x^2-1)\left(2\cdot\ 1\ \cdot(24x)\cdot(4x-1)\ -\ (12x^2-1)\ \cdot(4)\right)}{(4x-1)^2}\\
&= \frac{(12x^2-1)\left(144x^2-48x+4\right)}{(4x-1)^2}\\
&= \frac{(12x^2-1)\ \cdot\ 4(6x-1)^2}{(4x-1)^2}
\end{aligned}$$

3. On considère les fonctions $f(x) = \dfrac{x^3+18x}{x^2+2}$ et $g(x) = \sqrt{e^{\cos(x)}}$.

   À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de f (en vue de faire un tableau de signes) et dériver la fonction g (sans faire de simplifications).

   Correction

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+18)\cdot(x^2+2) - (x^3+18x)\cdot(2x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{x^4-12x^2+36}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{(x^2-6)^2}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{e^{\cos(x)}}}\cdot\left(e^{\cos(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^{\cos(x)}}}\cdot e^{\cos(x)}\cdot(\cos(x))' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^{\cos(x)}}}\cdot e^{\cos(x)}\cdot(-\sin(x)) \end{aligned}$$

4. On considère les fonctions $f(x) = \dfrac{(2x+1)^3}{(x+2)^2}$ et $g(x) = \sin\left(\ln\left(x^2\right)\right)$.

   À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de f (en vue de faire un tableau de signes) et dériver la fonction g (sans faire de simplifications).

   Correction

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3\cdot(2x+1)^2\cdot(2)\cdot(x+2)^2 - (2x+1)^3\cdot 2\cdot(x+2)\cdot(1)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(2x+1)^2\Big(3\cdot 1\cdot(2)\cdot(x+2) - 2\cdot(2x+1)\cdot 1\cdot(1)\Big)}{(x+2)^3} \\ &= \frac{(2x+1)^2\,(2x+10)}{(x+2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos\left(\ln\left(x^2\right)\right)\cdot\left(\ln\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(\ln\left(x^2\right)\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(x^2\right)' \\ &= \cos\left(\ln\left(x^2\right)\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x \end{aligned}$$

5. On considère la fonction $f(x) = (x^2+9)^3 \cdot e^{-x}$.
À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de f (en vue de faire un tableau de signes).

Correction

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2+9)^2 \cdot 2x \cdot e^{-x} + (x^2+9)^3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \big(3 \cdot 2x \cdot 1 + (x^2+9) \cdot 1 \cdot (-1)\big) \cdot (x^2+9)^2 \cdot e^{-x} \\ &= (-x^2+6x-9) \cdot (x^2+9)^2 \cdot e^{-x} \\ &= -(x-3)^2 \cdot (x^2+9)^2 \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

6. On définit les fonctions $f(x) = 2(x^3+6x^2+24x+48) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ et $g(x) = \cos\big(\ln(x^2)\big)$.
À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de f (en vue de faire un tableau de signes) et dériver la fonction g (sans faire de simplifications).

Correction

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(3x^2+12x+24) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 2(x^3+6x^2+24x+48) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (-\tfrac{1}{2}) \\ &= \big(2(3x^2+12x+24) \cdot 1 + 2(x^3+6x^2+24x+48) \cdot 1 \cdot (-\tfrac{1}{2})\big) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= -x^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \big(-\sin\big(\ln(x^2)\big)\big) \cdot \big(\ln(x^2)\big)' = \big(-\sin\big(\ln(x^2)\big)\big) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' \\ &= \big(-\sin\big(\ln(x^2)\big)\big) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \end{aligned}$$

7. À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de $\ln\left(\dfrac{(2x+1)^6}{(3x-2)^3}\right)$.

   On peut s'arrêter de factoriser dès que cela suffit pour faire un tableau de signes.

Correction

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\dfrac{(2x+1)^6}{(3x-2)^3}} \cdot \left(\frac{(2x+1)^6}{(3x-2)^3}\right)' \\
&= \frac{(3x-2)^3}{(2x+1)^6} \cdot \frac{6 \cdot (2x+1)^5 \cdot (2) \cdot (3x-2)^3 - (2x+1)^6 \cdot 3 \cdot (3x-2)^2 \cdot (3)}{(3x-2)^6} \\
&= \frac{(3x-2)^3}{(2x+1)^6} \cdot \frac{(2x+1)^5 \left(6 \cdot 1 \cdot (2) \cdot (3x-2) - 3 \cdot (2x+1) \cdot 1 \cdot (3)\right)}{(3x-2)^4} \\
&= \frac{18x-33}{(2x+1)\ (3x-2)}
\end{aligned}$$

8. On considère les fonctions $f(x) = \ln\left(\dfrac{3}{2x^2+1}\right)$ et $g(x) = \cos\left(\sin\left(x^3\right)\right)$.

   À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de f (en vue de faire un tableau de signes) et dériver la fonction g (sans faire de simplifications).

Correction

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\dfrac{3}{2x^2+1}} \cdot \left(\frac{3}{2x^2+1}\right)' \\
&= \frac{2x^2+1}{3} \cdot \frac{(0) \cdot (2x^2+1) - (3) \cdot (4x)}{(2x^2+1)^2} \\
&= \frac{-12x}{(3)\ (2x^2+1)} = \frac{-4x}{2x^2+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(-\sin\left(\sin\left(x^3\right)\right)\right) \cdot \left(\sin\left(x^3\right)\right)' = \left(-\sin\left(\sin\left(x^3\right)\right)\right) \cdot \cos\left(x^3\right) \cdot \left(x^3\right)' \\
&= \left(-\sin\left(\sin\left(x^3\right)\right)\right) \cdot \cos\left(x^3\right) \cdot 3x^2
\end{aligned}$$

9. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2\ln^4(3x^6) + 5x^4}{x^4}$.

   À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de f (en vue de faire un tableau de signes).

Correction

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(8\ln^3(3x^6)\cdot\frac{1}{3x^6}\cdot 18x^5 + 20x^3\right)\cdot x^4 - \left(2\ln^4(3x^6)+5x^4\right)\cdot 4\ x^3}{x^8} \\ &= \frac{\left(48\ln^3(3x^6)\cdot\frac{1}{x} + 20x^3\right)\cdot x - \left(8\ln^4(3x^6)+20x^4\right)\cdot 1}{x^5} \\ &= \frac{48\ln^3(3x^6) - 8\ln^4(3x^6)}{x^5} \\ &= \frac{8\ln^3(3x^6)\cdot\left(6-\ln(3x^6)\right)}{x^5} \end{aligned}$$

10. On considère les fonctions $f(x) = \dfrac{6\ln(4x^3) + 2x^4}{x^3}$ et $g(x) = \cos\left(\sqrt{\sin(x)}\right)$.

    À l'aide des règles de dérivation, factoriser la dérivée de f (en vue de faire un tableau de signes) et dériver la fonction g (sans faire de simplifications).

Correction

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(6\cdot\frac{1}{4x^3}\cdot 12x^2 + 8x^3\right)\cdot x^3 - \left(6\ln(4x^3)+2x^4\right)\cdot 3\ x^2}{x^6} \\ &= \frac{\left(18\cdot\frac{1}{x} + 8x^3\right)\cdot x - \left(18\ln(4x^3)+6x^4\right)\cdot 1}{x^4} \\ &= \frac{18 + 2x^4 - 18\ln(4x^3)}{x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(-\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{\sin(x)}\right)' = \left(-\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cdot(\sin(x))' \\ &= \left(-\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cdot\cos(x) \end{aligned}$$

Factorisation de dérivées pour réviser

Résolution de l'exercice 200

Voici comment procéder pour faire le point 1.

OB20 **Dérivée** calcul à l'aide des règles

La dérivée de la fonction f se factorise ainsi

$$f'(x) = \frac{12x^2\left(x^3-2\right)^2\left(x^6-x^3+1\right)}{\left(x^3-1\right)^3}$$

OB6 **Factorisations** polynôme de degré 2 résolution d'équations

Le polynôme de degré 2 en x^3 ne s'annule pas, car son discriminant est négatif

$$\Delta = 1 - 4 < 0$$

Ainsi le facteur $(x^3)^2 - (x^3) + 1$ est toujours positif.

OB11 **Fonctions** résolution d'inéquations

Le tableau de signes est

	0		1		$\sqrt[3]{2}$	
$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$	0	$+$

plus d'indications

2.11 Analyse : la règle de l'Hospital

Résolution de l'exercice 202

a) type : $(\frac{0}{0})$; limite : 3
b) type : $(\frac{0}{0})$; limite : 0
c) type : $(\frac{0}{0})$; limite : $\pm\infty$
d) type : $(\frac{0}{0})$; limite : $\frac{1}{2}$
e) type : $(\frac{0}{0})$; limite : $+\infty$
f) type : $(\frac{0}{0})$; limite : 2
g) type : $(\frac{\pm\infty}{+\infty})$; limite : 0
h) type : $(\frac{-\infty}{-1})$; limite : $+\infty$
i) type : $(\frac{0}{0})$; limite : $\frac{3}{2}$
j) type : $(\frac{-\infty}{-e})$; limite : $+\infty$
k) type : $(\frac{0}{0})$; limite : $\frac{1}{e}$
l) type : $(\frac{\pm\infty}{+\infty})$; limite : 0

2.12 Analyse : comportement des fonctions irrationnelles

♡ **Exercice 203 : comportement asymptotique local ou à l'infini** (2 fois 5 minutes)

1. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{4x+3}{5x-2}\, e^{\frac{2}{3}x}$$

Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$. Son bord : $\partial D = \left\{\frac{2}{5}, \pm\infty\right\}$.

Comportement local

$$\lim_{x\to\frac{2}{5}} f(x) = \lim_{x\to\frac{2}{5}} \frac{(4x+3)e^{\frac{2}{3}x}}{5x-2} \overset{(\frac{\neq 0}{0})}{=} \pm\infty \implies \text{AV d'équation } x = \tfrac{2}{5}$$

Comportement à l'infini

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{\left(\frac{4}{5}\cdot 0\right)}{=} 0 \implies \text{AH d'équation } y = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\left(\frac{4}{5}\cdot(+\infty)\right)}{=} \pm\infty \implies \text{AO possible}$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{(4x+3)e^{\frac{2}{3}x}}{5x^2-2x} \underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{\pm\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{\frac{2}{3}x} + (4x+3)e^{\frac{2}{3}x}\cdot\frac{2}{3}}{10x-2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{8}{3}x+6}{10x-2} e^{\frac{2}{3}x} \overset{\left(\frac{4}{15}\cdot(+\infty)\right)}{=} \pm\infty \implies \text{pas d'AO !}$$

2. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{-4x}{2\ln(x) - 3}$$

Domaine de définition : $D =]0, +\infty[\setminus \{e^{\frac{3}{2}}\}$. Son bord : $\partial D = \{0, e^{\frac{3}{2}}, +\infty\}$.

Comportement local

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\left(\frac{0}{-\infty}\right)}{=} 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{trou en } (0;0)$$

$$\lim_{x\to e^{\frac{3}{2}}} f(x) \overset{\left(\frac{\neq 0}{0}\right)}{=} \pm\infty \quad\Longrightarrow\quad \text{AV : } x = e^{\frac{3}{2}}$$

Comportement à l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{\text{Hospital}}{\overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} -2x = \pm\infty$$

Donc f a peut-être une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$!

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{2\ln(x) - 3} \overset{\left(\frac{-4}{\pm\infty}\right)}{=} 0$$

Donc f n'admet pas d'AO, car $h = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - 0x\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \underset{\text{calculé}}{\overset{\text{déjà}}{=}} \pm\infty$.

♡ **Exercice 204 : comportement asymptotique local ou à l'infini** (8 fois 5 minutes)

1. Étudier le comportement asymptotique **local** de la fonction

$$f(x) = 2x\, e^{\frac{3}{4x}}$$

Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Son bord : $\partial D = \{0, \pm\infty\}$.

Comportement local

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) \overset{(0\cdot 0)}{=} 0$$

Donc f a un trou en $(0;0)$!

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) \overset{(0\cdot(+\infty))}{=} \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{e^{\frac{3}{4x}}}{\frac{1}{2x}} \underset{\text{Hospital}}{\overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=}} \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{e^{\frac{3}{4x}} \cdot \frac{-3}{4x^2}}{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{3}{2} \lim_{x\overset{>}{\to}0} e^{\frac{3}{4x}} \overset{(+\infty)}{=} +\infty$$

Donc f a une AV d'équation $x = 0$!

2. Étudier le comportement asymptotique **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = 2x\, e^{\frac{3}{4x}}$$

Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Son bord : $\partial D = \big\{0, \pm\infty\big\}$.

Comportement à l'infini

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \overset{(\pm\infty\cdot 1)}{=} \pm\infty$$

Donc f a peut-être une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$!

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 2\, e^{\frac{3}{4x}} \overset{(2\cdot 1)}{=} 2$$

$$h = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (2x)\big) \overset{(\pm\infty-(\pm\infty))}{=} \lim_{x\to\pm\infty} 2x\big(e^{\frac{3}{4x}} - 1\big) \overset{(\pm\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{3}{4x}} - 1}{\frac{1}{2x}}$$

$$\underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{3}{4x}} \cdot \frac{-3}{4x^2}}{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{3}{2} \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{3}{4x}} \overset{(1)}{=} \frac{3}{2}$$

On a donc une AO d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$.

3. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \big(4x^2 - 2x + 3\big)\, e^{\frac{5}{3}x}$$

Domaine de définition : $D = \mathbb{R}$. Son bord : $\partial D = \big\{\pm\infty\big\}$.

Comportement local : rien à faire.

Comportement à l'infini

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{(\pm\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - 2x + 3}{e^{-\frac{5}{3}x}}$$

$$\underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{\pm\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{8x - 2}{e^{-\frac{5}{3}x} \cdot \big(-\frac{5}{3}\big)} \underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{\pm\infty}{-\infty})}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{e^{-\frac{5}{3}x} \cdot \big(\frac{25}{9}\big)} \overset{(\frac{8}{+\infty})}{=} 0 \implies \text{AH} : y = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{(\pm\infty\cdot(+\infty))}{=} \pm\infty \implies \text{AO possible}$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 2x + 3}{x}\, e^{\frac{5}{3}x} \overset{(\pm\infty\cdot(+\infty))}{=} \pm\infty \implies \text{Il n'y a pas d'AO}$$

4. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{\frac{3}{2x} - 4}{e^{\frac{3}{2x}}}$$

Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Son bord : $\partial D = \big\{0, \pm\infty\big\}$.

Comportement local

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) \overset{\left(\frac{-\infty}{0}\right)}{=} \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{AV d'équation } x = 0$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \underset{\text{Hospital}}{\overset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{-3}{2x^2}}{e^{\frac{3}{2x}} \cdot \frac{-3}{2x^2}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{e^{\frac{3}{2x}}} \overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{trou en } (0;0)$$

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \overset{\left(\frac{-4}{1}\right)}{=} -4 \quad \Longrightarrow \quad \text{AH d'équation } y = -4$$

5. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = -2\ln^2(x^6) + 4$$

Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \big\{0\big\}$. Son bord : $\partial D = \big\{0, \pm\infty\big\}$.

Comportement local

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{(-\infty)}{=} -\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{AV} : x = 0$$

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \overset{(-\infty)}{=} -\infty$$

Donc f a peut-être une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$!

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2\ln^2(x^6) + 4}{x}$$

$$\underset{\text{Hospital}}{\overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=}} \lim \frac{-4\ln(x^6) \cdot \frac{6}{x}}{1} = \lim \frac{-24\ln(x^6)}{x} \underset{\text{Hospital}}{\overset{\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-24 \cdot \frac{6}{x}}{1} \overset{\left(\frac{0}{1}\right)}{=} 0$$

Donc f n'admet pas d'AO, car $h = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - 0x\big) = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \underset{\text{calculé}}{\overset{\text{déjà}}{=}} \pm\infty$.

6. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = 3\ln(x^3) + 2x + 5$$

Domaine de définition : $D =]0, +\infty[$. Son bord : $\partial D = \{0, +\infty\}$.

Comportement local

$$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{(-\infty)}{=} -\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{AV} : x = 0$$

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \overset{(+\infty)}{=} +\infty$$

Donc f a peut-être une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$!

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3\ln(x^3) + 2x + 5}{x} \underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \cdot \frac{3}{x} + 2}{1} \overset{(\frac{0+2}{1})}{=} 2$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x \to +\infty} \Big(3\ln(x^3) + 5\Big) \overset{(+\infty)}{=} +\infty$$

Comme h n'est pas un nombre réel, f n'admet pas d'asymptote oblique.

7. Étudier le comportement asymptotique **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{2\ln(x^9) + 4x^2 + 3x - 5}{x}$$

Domaine de définition : $D =]0, +\infty[$. Son bord : $\partial D = \{0, +\infty\}$.

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{9}{x} + 8x + 3}{1} \overset{(\frac{0+\infty}{1})}{=} +\infty$$

Donc f a peut-être une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$!

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x^9) + 4x^2 + 3x - 5}{x^2} \underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{9}{x} + 8x + 3}{2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\tfrac{9}{x^2} + 4 + \tfrac{3}{2x}\right) \overset{(0+4+0)}{=} 4$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 4x\big) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x^9) + 3x - 5}{x} \underset{\text{Hospital}}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{9}{x} + 3}{1} \overset{(\frac{0+3}{1})}{=} 3$$

On a donc une AO d'équation $y = 4x + 3$.

8. Étudier le comportement asymptotique **local** et **à l'infini** de la fonction

$$f(x) = \frac{4\ln(x+2)}{-3x-3}$$

Domaine de définition : $D =]-2, +\infty[\setminus \{-1\}$. Son bord : $\partial D = \big\{-2, -1, +\infty\big\}$.

Comportement local

$$\lim_{x\to -2} f(x) \overset{\left(\frac{-\infty}{3}\right)}{=} -\infty \implies \text{AV} : x = -2$$

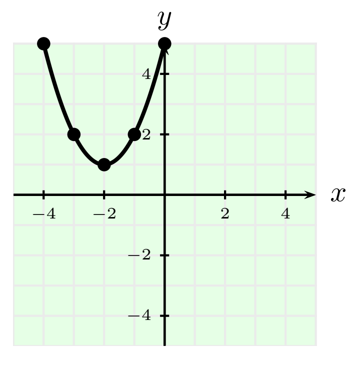
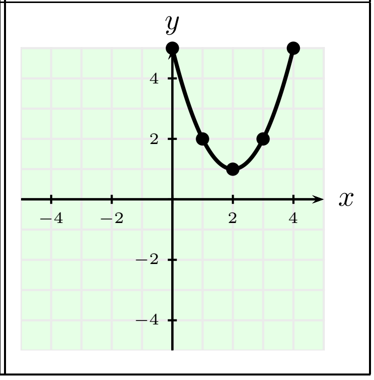
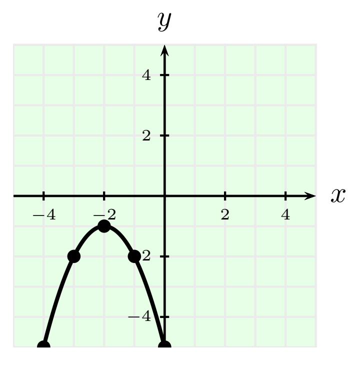
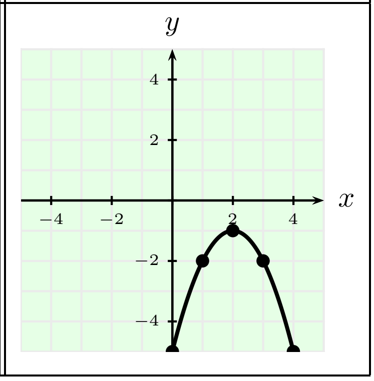
$$\lim_{x\to -1} f(x) \underset{\text{Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to -1} \frac{\frac{4}{x+2}}{-3} = \lim_{x\to -1} \frac{-4}{3(x+2)} \overset{\left(\frac{-4}{3}\right)}{=} -\frac{4}{3} \implies \text{trou en } (-1; -\tfrac{4}{3})$$

Comportement à l'infini

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \underset{\text{Hospital}}{\overset{\left(\frac{\pm\infty}{-\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{4}{x+2}}{-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4}{3(x+2)} \overset{\left(\frac{-4}{+\infty}\right)}{=} 0 \implies \text{AH} : y = 0$$

2.13 Analyse : parité des fonctions

Résolution de l'exercice 206

$f(-x) = x^2 + 4x + 5$	$f(x) = x^2 - 4x + 5$
	
$-f(-x) = -x^2 - 4x - 5$	$-f(x) = -x^2 + 4x - 5$
	

♡ **Exercice 207 : parité d'une fonction** (11 fois 5 minutes)

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = x\left(\cos(x) - x^2\right) \qquad\qquad g(x) = x(x-1)^2$$

Correction

$$f(-x) = -x(\cos(-x) - (-x)^2) = -x(\cos(x) - x^2) = -f(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est impaire.

$Z = \{0, 1\}$ a un défaut de symétrie ($g(1) = 0$, mais $g(-1) \neq 0$).

Donc g n'est ni paire, ni impaire.

2. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x \qquad\qquad g(x) = x^4 - 3x^2 + 1$$

Correction

On a $f(2) = -6$ et $f(-2) = -18 \neq \pm f(2)$ (pourtant $f(1) = f(-1)$).

Donc f n'est ni paire, ni impaire.

$$g(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = g(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc g est paire.

3. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = x\left(\sin(x) - x^3\right) \qquad\qquad g(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

Correction

$$f(-x) = -x(\sin(-x) - (-x)^3) = x(\sin(x) - x^3) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est paire.

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ a un défaut de symétrie ($g(2)$ n'existe pas, mais $g(-2)$ existe).

Donc g n'est ni paire, ni impaire.

4. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = \frac{2^x - 2}{2^x + 2} \qquad\qquad g(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$$

Correction

$Z = \{1\}$ a un défaut de symétrie ($f(1) = 0$, mais $f(-1) \neq 0$).

Donc f n'est ni paire, ni impaire.

$$g(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} \underset{\text{par } 2^x}{\overset{\text{amplifier}}{=}} \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -g(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc g est impaire.

5. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x^3}{x^2} \qquad\qquad g(x) = \frac{1 - x^3}{x^2}$$

Correction

$$f(-x) = \frac{\sin(-x) - (-x)^3}{(-x)^2} = -\frac{\sin(x) - x^3}{x^2} = -f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Donc f est impaire.

$Z = \{1\}$ a un défaut de symétrie ($g(1) = 0$, mais $g(-1) \neq 0$).

Donc g n'est ni paire, ni impaire.

6. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 + x \qquad\qquad g(x) = -x^5 + 5x^3 + x$$

Correction

On a $f(2) = 14$ et $f(-2) = 26 \neq \pm f(2)$ (pourtant $f(1) = f(-1)$).

Donc f n'est ni paire, ni impaire.

$$g(-x) = -(-x)^5 + 5(-x)^3 + (-x) = x^5 - 5x^3 - x = -g(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc g est impaire.

7. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = \frac{\cos(x) - x^2}{x^3} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2}{1 - x^3}$$

Correction

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) - (-x)^2}{(-x)^3} = -\frac{\cos(x) - x^2}{x^3} = -f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Donc f est impaire.

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a un défaut de symétrie ($g(1)$ n'existe pas, mais $g(-1)$ existe).

Donc g n'est ni paire, ni impaire.

8. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = x^3 + x^2 - x \qquad\qquad g(x) = x^5 + x^3 - x$$

Correction

On a $f(2) = 10$ et $f(-2) = -2 \neq \pm f(2)$ (pourtant $f(1) = f(-1)$).

Donc f n'est ni paire, ni impaire.

$$g(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 - (-x) = -x^5 - x^3 + x = -g(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc g est impaire.

9. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{x^3}{x^2} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$$

Correction

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} - \frac{(-x)^3}{(-x)^2} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{x^3}{x^2} = -\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{x^3}{x^2}\right) = -f(x)$$
pour tout $x \in D$.

Donc f est impaire.

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ a un défaut de symétrie ($g(2)$ n'existe pas, mais $g(-2)$ existe).

Donc g n'est ni paire, ni impaire.

10. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = \frac{4^{-x} - 4^{x}}{x^2 - 4} \qquad g(x) = \frac{x-2}{x^3+1}$$

Correction

$$f(-x) = \frac{4^{-(-x)} - 4^{-x}}{(-x)^2 - 4} = \frac{4^{x} - 4^{-x}}{x^2 - 4} = -\frac{4^{-x} - 4^{x}}{x^2 - 4} = -f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Donc f est impaire.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a un défaut de symétrie ($g(-1)$ n'existe pas, mais $g(1)$ existe).

Donc g n'est ni paire, ni impaire.

11. Déterminer la parité des fonctions suivantes en argumentant correctement !

$$f(x) = x^3 - x^2 - x \qquad g(x) = x^4 - x^2 - 1$$

Correction

On a $f(2) = 2$ et $f(-2) = -10 \neq \pm f(2)$ (pourtant $f(1) = f(-1)$).

Donc f n'est ni paire, ni impaire.

$$g(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 - 1 = x^4 - x^2 - 1 = g(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc g est paire.

2.14 Analyse : boîte à outils

Résolution de l'exercice 208

On utilise les compétences développées dans

OB6 **Factorisations** polynôme de degré 2 résolution d'équations	OB19 **Dérivée** équation d'une tangente

L'idée fondamentale est

On sait trouver l'équation de la tangente en x_0 qui passe donc par le point du graphe $\big(x_0; f(x_0)\big)$.

Pour trouver les éventuelles valeurs de x_0, on utilise l'équation de la tangente en x_0 et le fait qu'on connaisse un point par lequel elle passe (qui n'est pas sur le graphe de la fonction).

1. On cherche l'équation qui donne les valeurs de x_0 en lesquels la tangente passe.

   L'équation de la tangente t qui passe par le point du graphe $(x_0; f(x_0))$ est
   $$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
   On utilise le fait que le point $P(3;-2)$ appartient à la droite t.
   $$P(3;-2) \in t \iff -2 = f(x_0) + f'(x_0)(3 - x_0)$$
   Comme la dérivée de f est $f'(x) = x - 4$, on sait que
   $$f(x_0) = \tfrac{1}{2}x_0^2 - 4x_0 + 10 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = x_0 - 4$$
   et on arrive à l'équation
   $$-2 = \tfrac{1}{2}x_0^2 - 4x_0 + 10 + (x_0 - 4)(3 - x_0)$$

2. On résout cette équation pour trouver les éventuelles valeurs de x_0.
   $$\begin{aligned}
   &-2 = \tfrac{1}{2}x_0^2 - 4x_0 + 10 + (x_0 - 4)(3 - x_0)\\
   &\iff -2 = \tfrac{1}{2}x_0^2 - 4x_0 + 10 - x_0^2 + 7x_0 - 12\\
   &\iff \tfrac{1}{2}x_0^2 - 3x_0 = 0 \iff x_0^2 - 6x_0 = 0\\
   &\iff x_0(x_0 - 6) = 0 \iff x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = 6
   \end{aligned}$$

3. On détermine les équations des éventuelles tangentes.

   La tangente en $x_0 = 0$ passe par $(0; f(0)) = (0; 10)$ et est de pente $f'(0) = -4$. Donc son équation est $y = 10 - 4(x - 0) \iff y = -4x + 10$.

   La tangente en $x_0 = 6$ passe par $(6; f(6)) = (6; 4)$ et est de pente $f'(6) = 2$. Donc son équation est $y = 4 + 2(x - 6) \iff y = 2x - 8$.

Résolution de l'exercice 209

On utilise les compétences développées dans

OB10 **Fonctions** points d'intersection de deux courbes	OB19 **Dérivée** équation d'une tangente	OB28 **Géométrie 2D** périmètre, aire et angle

L'idée fondamentale est

> L'angle en lequel deux fonctions se coupent est l'angle aigu entre les tangentes au point d'intersection.
>
> Pour trouver cet angle, on cherche l'angle entre les vecteurs directeurs à ces tangentes au point d'intersection.

1. On cherche l'abscisse du point d'intersection des graphes de f et de g.

$$f(x) = g(x) \iff 2x^3 = 8 - 6x^3 \iff 8x^3 = 8 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$$

2. On détermine les vecteurs directeurs des tangentes aux fonctions en $x = 1$.

On pense que $x_0 = 1$.
Les dérivées sont

$$f'(x) = 6x^2 \quad \text{et} \quad g'(x) = -18x^2$$

Les vecteurs directeurs sont

«Quand on avance de 1, on monte de la pente (dérivée en x_0)»

$$\vec{d}_f = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{d}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix}$$

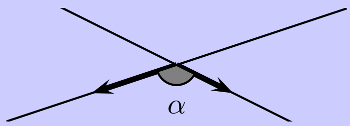
3. On détermine l'angle entre ces deux vecteurs, noté α.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{d}_f \bullet \vec{d}_g}{\|\vec{d}_f\| \cdot \|\vec{d}_g\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{1 - 108}{\sqrt{1+36} \cdot \sqrt{1+324}} = \frac{-107}{\sqrt{12'025}}$$

$$\iff \alpha \cong 167.36°$$

4. On détermine l'angle entre les deux tangentes.

Schéma pour la réflexion



Comme α est obtus, l'angle aigu entre les deux tangentes vaut $180° - \alpha \cong 12.64°$.

Résolution de l'exercice 210

Les zéros

OB5 **Factorisations**
fraction algébrique

On factorise f par regroupement : $f(x) = \ldots = (x-1)^2(x+1)$.
Donc $Z_f = \{-1, 1\}$.
Ainsi
f s'annule et change de signe en $x = -1$ (la fonction traverse l'axe des x)
et
f s'annule, mais ne change pas de signe en $x = 1$ (la fonction touche l'axe des x sans traverser).

Les optima

OB20 **Dérivée**
calcul à l'aide des règles

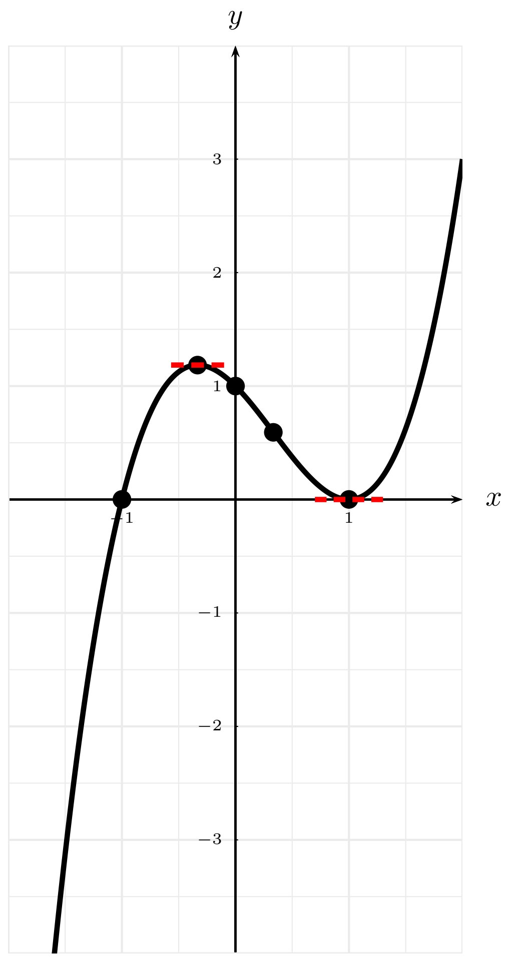
OB6 **Factorisations**
polynôme de degré 2
résolution d'équations

On factorise f' par Viète : $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)(x+\frac{1}{3})$.
Donc $Z_{f'} = \{-\frac{1}{3}, 1\}$.
Ainsi
f' s'annule et change de signe en $x = -\frac{1}{3}$ et en $x = 1$ (optima).

Le point d'inflexion

OB20 **Dérivée**
calcul à l'aide des règles

On factorise f'' : $f''(x) = 6x - 2 = 6(x - \frac{1}{3})$.
Donc $Z_{f''} = \{\frac{1}{3}\}$.
Ainsi
f'' s'annule et change de signe en $x = \frac{1}{3}$ (point d'inflexion).



Points importants et esquisse de la fonction

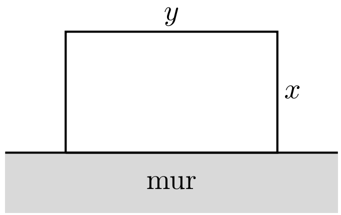
Intersection avec l'axe des x : $(-1; 0)$ et $(1; 0)$.
Intersection avec l'axe des y : $(0; 1)$.

Optima locaux en $(-\frac{1}{3}; \frac{32}{27})$ et en $(1; 0)$.

Point d'inflexion en $(\frac{1}{3}; \frac{16}{27})$.

Résolution de l'exercice 211

- **On fait un schéma pour se représenter la situation.**



- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Quantité à optimiser : l'aire de l'enclos

  $$\text{Aire} = A(x;y) = xy$$

  Contrainte : la longueur de la clôture vaut 200 *mètres.*

  $$\text{Périmètre} = 200 = 2x + y \iff y = 200 - 2x$$

  Substitution pour que la quantité à optimiser ne dépende que d'une variable.

  $$A(x;y) = xy = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2 = A(x)$$

  Recherche du domaine d'intérêt.

  Il est évident que x et y doivent être positifs.

  $$y > 0 \iff 200 - 2x > 0 \iff 2x < 200 \iff x < 100$$

  Donc $x \in]0, 100[$. Le domaine d'intérêt est $I =]0, 100[$.

- **On fait le tableau de variation de la fonction.**

  Comme A est une fonction quadratique, la technique vue en première année aurait fonctionné et donné exactement la même réponse.

  La dérivée est $A'(x) = 200 - 4x$.

  Le tableau de variation est effectué sur le domaine d'intérêt, il faut donc utiliser les zéros de la dérivée qui sont dans ce domaine.

x	0		50		100
$A'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
comportement de $A(x)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

  On constate un **maximum** pour $x = 50$ mètres.

- **On donne la réponse demandée.**

  En substituant $x = 50$ dans $y = 200 - 2x$, on trouve $y = 100$ mètres.

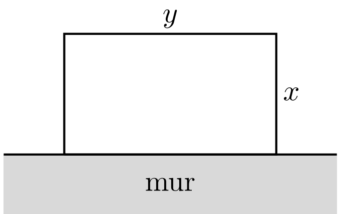
  Les dimensions de l'enclos sont $x = 50$ mètres et $y = 100$ mètres.

Remarque On peut aussi isoler x de la contrainte ce qui donne $x = \frac{1}{2}(200 - y)$. En substituant dans l'aire, on trouve $A(x) = \frac{1}{2}(200y - y^2)$ et le domaine d'intérêt est $]0, 200[$. On dérive par rapport à y, on fait le tableau de variation de la fonction A et on constate les mêmes conclusions.

Résolution de l'exercice 212

Rappel : un hectare correspond à 10 000 mètres carrés.

- **On fait un schéma pour se représenter la situation.**



- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Quantité à optimiser : la longueur de la clôture

  $$\text{Périmètre} = P(x;y) = 2x + y$$

  Contrainte : l'aire de l'enclos vaut 5 000 *mètres carrés.*

  $$\text{Aire} = 5\,000 = xy \iff y = \frac{5000}{x}$$

  Substitution pour que la quantité à optimiser ne dépende que d'une variable.

  $$P(x;y) = 2x + y = 2x + \frac{5000}{x} = P(x)$$

  Recherche du domaine d'intérêt.

  Il est évident que x et y doivent être positifs.

  $$y > 0 \iff \frac{5000}{x} > 0 \iff 5000 > 0 \text{ est toujours vrai}$$

  Donc $x \in \,]0, +\infty[$. Le domaine d'intérêt est $I = \,]0, +\infty[$.

- **On fait le tableau de variation de la fonction.**

  Comme P n'est pas une fonction quadratique, la technique vue en première année ne marche pas !

  La dérivée est $P'(x) = 2 - \dfrac{5000}{x^2} = \dfrac{2(x^2 - 2500)}{x^2} = \dfrac{2(x-50)(x+50)}{x^2}$.

  Le tableau de variation est effectué sur le domaine d'intérêt, il faut donc utiliser les zéros de la dérivée qui sont dans ce domaine.

x	0		50	
$P'(x)$	$\lightning$	$-$	0	$+$
comportement de $P(x)$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

  On constate un **minimum** pour $x = 50$ mètres.

- **On donne la réponse demandée.**

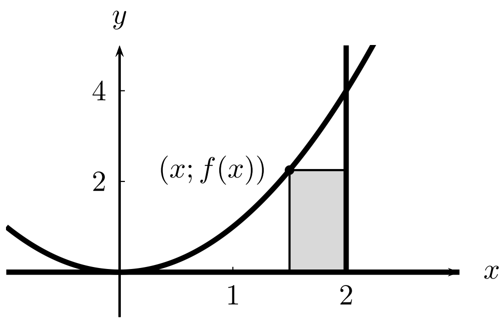
  En substituant $x = 50$ dans $y = \dfrac{5000}{x}$, on trouve $y = 100$ mètres.

  La largeur vaut 50 mètres, la longueur vaut 100 mètres. Le prix sera de $2 \cdot P(50) = 400$ francs.

Ce problème est le problème dual du précédent. Cela montre qu'il faut être attentif à ce qu'on optimise.

Résolution de l'exercice 213

Lorsqu'on travaille avec des fonctions, il faut être capable d'esquisser la situation, mais aussi de bien se souvenir que les points du graphe sont de coordonnées $(x; f(x))$ (ou $(x; y)$ avec la contrainte $y = f(x)$). C'est la définition même du graphe de f !



1. En regardant le schéma, on voit que l'aire du rectangle est donnée par

$$A(x) = (2-x)f(x) = (2-x)x^2 = 2x^2 - x^3, \quad x \in]0, 2[$$

Comme A n'est pas une fonction quadratique, la technique vue en première année ne marche pas !
On factorise la dérivée de la fonction A.

$$A'(x) = 4x - 3x^2 = x(4-3x)$$

On fait le tableau de variation de A.

x	0		$\frac{4}{3}$		2
$A'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
comportement de $A(x)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

Le maximum est en $x = \frac{4}{3}$.
L'aire maximale vaut donc $A\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$.

2. En regardant le schéma ci-dessus, on voit que le périmètre du rectangle est donné par

$$P(x) = 2(2-x) + 2f(x) = 4 - 2x + 2x^2, \quad x \in]0, 2[$$

Comme P est une fonction quadratique, la technique vue en première année aurait fonctionné et donné exactement la même réponse.
On factorise la dérivée de la fonction P.

$$P'(x) = 4x - 2$$

On fait le tableau de variation de P.

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$P'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
comportement de $P(x)$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$	

Le minimum est en $x = \frac{1}{2}$.
Le périmètre minimal vaut donc $P\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

2.15 Analyse : problèmes d'analyse

Résolution de l'exercice 214

1. Les points sont $A(-\frac{3}{2};0)$, $B(-1;\ln(2))$ et $C(3;\ln(10))$.
2. L'asymptote verticale de g est donc la droite d'équation $x=-2$.
3. Il ne suffit pas de prouver que $x=0$, il faut aussi affirmer que $y=f(0)=0$.
4. Les points d'inflexion sont $B(-1;\ln(2))$ et $(1;\ln(2))$.
5. L'équation de la tangente est $t: y=-x+\ln(2)-1$.
6. Les abscisses de ces points sont $2\pm\sqrt{3}$.
7. L'angle cherché vaut $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{221}}\right)\cong 19.6538°$.
8. La longueur est maximale pour $x=-2+\sqrt{5}$ et vaut environ 1.44364.
9. L'aire vaut $3\ln(5)-4\cong 0.828314$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 215

A. a) Le maximum de f se trouve en regardant où la dérivée de f s'annule et change de signe. On a

$$f'(x) = \cdots = 2e^{-x}(1-x)$$

Donc le maximum de f se trouve au point $(1; f(1)) = (1; 2e^{-1})$.
Le maximum de g se trouve au bord du premier quadrant, au point $(0; 1)$.

b) Le point A se trouve à l'intersection des graphes de f et de g, son abscisse satisfait $f(x) = g(x)$. On résout et on trouve $A(\frac{1}{2}; e^{-\frac{1}{2}})$.

c) L'angle cherché vaut $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}}\right) \cong 62.4761°$.

d) On calcule la dérivée seconde et on regarde où elle s'annule et change de signe. On a

$$f''(x) = \cdots = 2e^{-x}(x-2)$$

Donc le point d'inflexion de f se trouve au point $(2; f(2)) = (2; 4e^{-2})$.

e) On peut deviner une primitive de g, pour calculer une primitive de f, on fait une intégrale par parties. On trouve que l'aire vaut $2e^{-\frac{1}{2}} - 1$.

f) La fonction à optimiser est

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\cdot \text{base}\cdot\text{hauteur} = \tfrac{1}{2}\big(g(x)-f(x)\big)\big(\tfrac{1}{2}-x\big) = \tfrac{1}{2}\big(e^{-x}-2xe^{-x}\big)\big(\tfrac{1}{2}-x\big)$$

Le domaine d'intérêt est $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Il y a beaucoup de façons d'écrire cette fonction, ce qui est important est de factoriser la dérivée !
Voici une autre écriture possible, mais plus subtile à trouver, pour $A(x)$ qui va très bien pour la dérivée :

$$\tfrac{1}{2}e^{-x}(1-2x)(\tfrac{1}{2}-x) \;=\; \tfrac{1}{4}e^{-x}(1-2x)^2$$

La dérivée factorisée est $A'(x) = -\frac{1}{4}e^{-x}(1-2x)(5-2x)$.
Les facteurs $(1-2x)$ et $(5-2x)$ s'annulent et changent de signe en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \frac{5}{2}$.
Le tableau de variation de cette fonction est

x	0		$\frac{1}{2}$
$A'(x)$	$-$	$-$	0
comportement de A	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Le maximum de l'aire se trouve en $x = 0$ et l'aire vaut $A(0) = \frac{1}{4}$.
C'est toujours ainsi, s'il n'y a pas de zéro dans le domaine d'intérêt, le maximum ou minimum se trouve au bord du domaine d'intérêt ! Il n'y a même pas besoin de faire le tableau de variation.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 216

A. (a) On résout l'équation $f(x) = g(x)$ qui est équivalente à $x(x-1)(x+1) = 0$.
Ainsi, on a les abscisses $x = 0$, $x = -1$ et $x = 1$.
Les points d'intersection sont ainsi $B(-1;-1)$, $O(0;0)$ et $A(1;1)$

(b) On a $f'(x) = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

Ces fonctions s'annulent et change de signe en ± 1 pour f' et $\pm\sqrt{3}$ et 0 pour f''.
Ainsi, on a un minimum en B, un maximum en A, un point d'inflexion en O, mais aussi des points d'inflexion en $(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$ et en $(-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

(c) On peut deviner les primitives (pour la fonction f, on peut utiliser la substitution $t = 1 + x^2$ si on n'arrive pas à deviner). On trouve $2\ln(2) - 1 \cong 0.3863$.

(d) L'angle cherché vaut $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) \cong 18.43°$.

(e) On veut optimiser $l(x) = f(x) - g(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

La dérivée se factorise par Viète : on trouve

$$l'(x) = -\frac{\left(x^2 + (2+\sqrt{5})\right)\left(x^2 + (2-\sqrt{5})\right)}{(1+x^2)^2}$$

La fonction $l'(x)$ s'annule et change de signe aux valeurs $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2} \cong \pm 0.4859$.

x	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		1
$l'(x)$		$+$	0	$-$	
comportement de l		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

Ainsi, le segment a une longueur maximale de $l\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \cong 0.3003$.

(f) On veut optimiser $P(x) = 2x + 2f(x) = 2x + \dfrac{4x}{1+x^2}$ pour $x \in [1, 3]$.

La dérivée se factorise facilement (il est préférable de ne pas factoriser $P(x)$, car dans ce cas le calcul de la dérivée est bien plus long). On trouve

$$P'(x) = \frac{2(x^4+3)}{(1+x^2)^2}$$

La dérivée $P'(x)$ ne s'annule pas et est toujours positive. Donc le maximum et le minimum du périmètre se trouvent au bord du domaine d'intérêt.

Le minimum a lieu pour $x = 1$ et le périmètre vaut $P(1) = 2 + 2 = 4$.

Le maximum a lieu pour $x = 3$ et le périmètre vaut $P(3) = 6 + \frac{6}{5} = \frac{36}{5}$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 217

1. (a) La première coordonnée de K est 0 ; la deuxième est $f(0) = 3$. Ainsi $K(0;3)$.
   Les premières coordonnées de L et M satisfont l'équation $f(x) = 0$. On a

   $$f(x) = 0 \iff -x^2 + 2x + 3 = 0 \overset{\Delta=4+12=16}{\iff} x = \frac{-2 \pm 4}{-2} = 1 \pm 2$$

   Ainsi $L(3;0)$ et $M(-1;0)$ (leur deuxième coordonnée est nulle).

   (b) On a $g(3) = 0$, ainsi L est aussi un point de $\mathcal{C}_g$.

   (c) Elles sont tangentes en K si et seulement si $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$.

   On a $f(0) = 3 = g(0)$.
   On a $f'(x) = -2x + 2$, $g'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$, ainsi $f'(0) = 2 = g'(0)$.
   (l'équation de la tangente est $y = 2x + 3$)

2. L'angle α entre les vecteurs $\binom{1}{f'(3)} = \binom{1}{-4}$ et $\binom{1}{g'(3)} = \binom{1}{-e^3}$ satisfait

   $$\cos(\alpha) = \frac{\binom{1}{-4} \bullet \binom{1}{-e^3}}{\left\|\binom{1}{-4}\right\| \cdot \left\|\binom{1}{-e^3}\right\|} = \frac{1 + 4e^3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{1 + e^6}}$$

   Ainsi $\alpha \cong 11.186°$.

3. (a) La pente de la droite (KL) est $\dfrac{-3}{3} = -1$.

   (b) Le nombre x satisfait $f'(x) = -1 \iff -2x + 2 = -1 \iff -2x = -3 \iff x = \frac{3}{2}$.

4. (a) On a

   $$\int (3 \overset{\downarrow}{-} x)\overset{\uparrow}{e^x}\, dx = (3-x)e^x + \int e^x\, dx + C = (4-x)e^x + C$$

   Vérification : $\Big((4-x)e^x + C\Big)' = -e^x + (4-x)e^x = (-1 + 4 - x)e^x = (3-x)e^x$.

   (b) On a

   $$\begin{aligned} \textstyle\int_0^3 \big(g(x) - f(x)\big)\, dx &= \textstyle\int_0^3 (3-x)e^x\, dx - \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)\, dx \\ &\overset{4a)}{=} (4-x)e^x \Big|_0^3 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right)\Big|_0^3 = \cdots = e^3 - 13 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{plus d'indications}}$

Résolution de l'exercice 218

1. On constate que le type de limite est $(\frac{0}{0})$, on applique la règle de l'Hospital.
   On trouve que la limite vaut 3.

2. (a) L'abscisse des points d'intersection se trouve en résolvant $f(x) = g(x)$. Cette équation est une bicarrée $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ que l'on résout par Viète, on trouve $x^2 = -4$ (qui n'a pas de solution) et $x^2 = 1$, qui a deux solutions : $x = \pm 1$.

   L'ordonnée se trouve en remplaçant les abscisses trouvée dans f (ou dans g, c'est égal).

   On trouve $A(-1;4)$ et $(1;4)$.

   (b) La dérivée de f est $f'(x) = 4x(x^2+1)$. Le tableau de variation de f est

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
comportement de f	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

   Donc f est une fonction qui descend jusqu'au minimum $(0;1)$ et qui remonte.

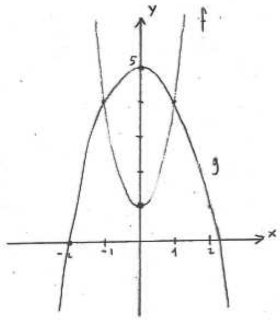
   Autre manière de faire en passant par la dérivée seconde

   La dérivée seconde est $f''(x) = 12x^2 + 4$. Comme $12x^2 \geqslant 0$, alors f'' est toujours positive (en fait plus grande ou égale à 4).

   Ainsi, le graphe de f ressemble à un sourire dont le point le plus bas est $(0;1)$.

   (c) $f(-x) = ((-x)^2+1)^2 = (x^2+1)^2 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est paire.
   $g(-x) = 5 - (-x)^2 = 5 - x^2 = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc g est paire.

   Voici l'esquisse.



   (d) L'équation de la tangente en $x_0 = -1$ est $t(x) = 2x + 6$ $(y = t(x))$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 219

1. (a) $f(2)$, $g(2)$, $h(2)$ sont les trois égaux $ln(6)$, donc c'est tout bon !

   (b) L'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2}x + \ln(6) - 1$.

   (c) Les vecteurs directeurs des tangentes sont $\binom{1}{\frac{1}{2}}$ et $\binom{1}{\frac{5}{6}}$. L'angle entre ces deux vecteurs est environ 13.24° ; c'est aussi l'angle entre les tangentes.

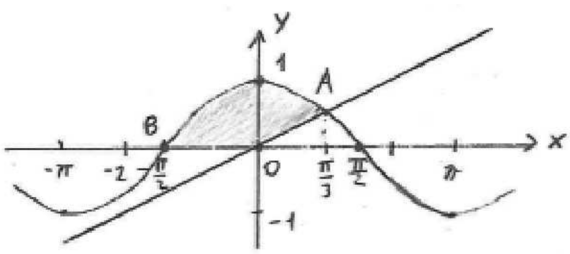
   (d) En résolvant l'équation $-1 = f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0)$, on trouve $x_0 = \frac{1}{3}$, et la tangente est d'équation $y = 3x - 1$.

   (e) Le domaine est $D = \left]\frac{4}{5}, +\infty\right[\setminus \{1, 3\}$ (pour que le logarithme existe, il faut que $5x - 4 > 0$; il faut éviter la division par 0 qui se produit quand $x = 1$ et quand $x = 3$ (Viète)).

   La limite, de type $(\frac{0}{0})$, se calcule par l'Hospital. On trouve $\frac{5}{2}$.

2. (a) On vérifie que $t(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $t(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et c'est en ordre.

   (b) Voici une esquisse.



   (c) Sa pente vaut $\frac{3}{2\pi}$, elle passe par l'origine. Donc $l(x) = \frac{3}{2\pi}x$.

   (d) Il faut calculer

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx - \text{ aire du triangle de base } \frac{\pi}{3} \text{ et de hauteur } \frac{1}{2}$$

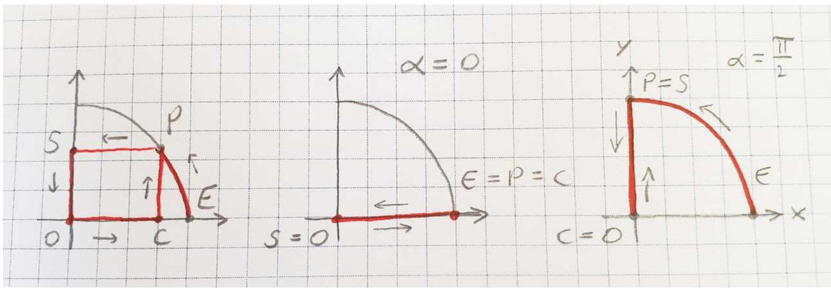
   L'aire du triangle peut aussi être calculée en intégrant la fonction l de 0 à $\frac{\pi}{3}$.

   On trouve $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\pi}{12}$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 220

A. Puisqu'on insiste bien sur le fait qu'on veut connaitre l'angle α, il est naturel de chercher une fonction dont la variable est l'angle α.



Par définition des radians, la longueur du chemin EP vaut α !

Par définition des fonctions cosinus et sinus, les coordonnées de P sont $P(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$.

Ainsi la longueur est donnée par $l(\alpha) = \alpha + 2\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha)$, avec $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La dérivée se calcule de tête $l'(\alpha) = 1 - 2\sin(\alpha) + 2\cos(\alpha)$.

On cherche les zéros de la dérivée. Il faut donc résoudre $\sin(\alpha) - \cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

On peut résoudre cette équation en remplaçant $\sin(\alpha)$ par $\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$, ce qui, par Viète, mènera à la même réponse que ci-dessous, mais moins subtilement. On peut aussi utiliser $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$.

On élève au carré (on rappelle que des solutions peuvent être ajoutées en élevant au carré), on utilise le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, la formule (établie en première année, mais qui se trouve aussi dans le formulaire) $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ et on arrive à

$$l'(\alpha) = 0 \overset{\text{élévation}}{\underset{\text{au carré}}{\Longrightarrow}} \sin(2\alpha) = \frac{3}{4}$$

On dessine le cercle trigonométrique, on place les deux points dont la deuxième coordonnées vaut $\frac{3}{4}$. Les angles 2α correspondant valent environ $48.5904°$ et $131.4096°$ (si α doit être entre $0°$ et $90°$, l'angle 2α doit être entre $0°$ et $180°$).

Il faut réagir, quand on travaille avec des fonctions trigonométriques, il faut travailler en radians. Ainsi, les angles 2α valent environ 0.8481 et 2.2935.

L'équation $\sin(2\alpha) = \frac{3}{4}$ admet donc deux solutions pour α qui sont environ 0.4240 et 1.1468.

Il faut vérifier si ces solutions ont été ajoutées lors de l'élévation au carré. C'est le cas pour celle qui vaut environ 0.4240, mais celle qui vaut environ 1.1468 est bien une solution (et elle se trouve bien entre 0 et $\frac{\pi}{2} \cong 1.5709$).

Voici le tableau de variation.

α	0		environ 1.1468		$\frac{\pi}{2}$
$l'(x)$	3	$+$	0	$-$	-1
comportement de l		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

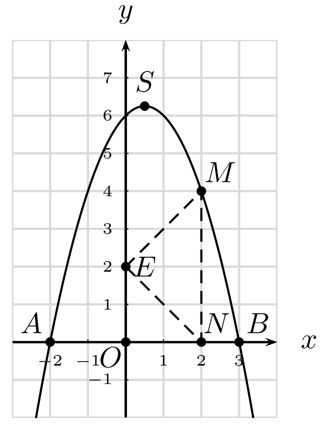
Donc le chemin est de longueur maximale pour $\alpha \cong 1.1468$ (en degré, pour $\alpha \cong 24.295°$).

Le chemin de longueur minimale se produit pour α au bord du domaine de définition. Donc en $\alpha = 0$ ou en $\alpha = \frac{\pi}{2}$. On compare donc $l(0)$ et $l(\frac{\pi}{2})$. Le premier vaut 2, le deuxième vaut $\frac{\pi}{2} + 2 \cong 3.5709$.

Donc le chemin est de longueur minimale pour $\alpha = 0$ et sa longueur minimale vaut 2.

$\boxed{\text{plus d'indications}}$

Résolution de l'exercice 221



1. La première coordonnée du sommet est $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$.
   On peut aussi chercher où la dérivée $(-x^2+x+6)'$ s'annule et change de signe.
   Son image vaut $y = -(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 6 = 6.25$. Donc $S(0.5; 6.25)$.
   La première coordonnée des points d'intersection se trouve en résolvant
   $$-x^2 + x + 6 = 0 \overset{\Delta=1+24=25}{\Longleftrightarrow} x = \frac{-1 \pm 5}{-2} = -2 \text{ ou } 3$$
   Ainsi $A(-2; 0)$ et $B(3; 0)$. Le graphe est dessiné ci-contre.

2. L'aire demandée est
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx &= \Big(-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\Big)\Big|_{-2}^{3} \\ &= \Big(-\tfrac{1}{3}\cdot 3^3 + \tfrac{1}{2}\cdot 3^2 + 6\cdot 3\Big) - \Big(-\tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 6\cdot(-2)\Big) \\ &= (-9 + \tfrac{9}{2} + 18) - (\tfrac{8}{3} + 2 - 12) = 19 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{8}{3} = \tfrac{114+27-16}{6} = \tfrac{125}{6} \cong 20.83\end{aligned}$$

3. On résout l'équation $9 = f(x_0) + f'(x_0)(3 - x_0)$, qui est équivalente à $0 = x_0^2 - 6x_0$. On factorise par x_0 et on trouve les solutions $x_0 = 0$ et $x_0 = 6$.
   La tangente en $x_0 = 0$ est d'équation $y = x+6$; La tangente en $x_0 = 6$ est d'équation $y = -11x+42$.

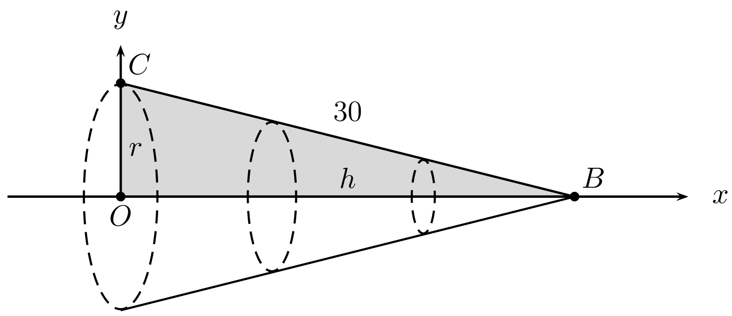
4. L'aire du triangle ONE vaut $\dfrac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2} = \dfrac{x \cdot 2}{2} = x$
   L'aire du triangle MNE vaut $\dfrac{\text{base} \cdot \text{hauteur}}{2} = \dfrac{(-x^2 + x + 6)\cdot x}{2} = \frac{1}{2}(-x^3 + x^2 + 6x)$
   On résout l'équation suivante (on peut diviser par x puisqu'on cherche $x > 0$)
   $$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(-x^3 + x^2 + 6x) = x &\Longleftrightarrow -x^2 + x + 6 = 2 \Longleftrightarrow -x^2 + x + 4 = 0 \\ &\overset{\Delta=1+16}{\Longleftrightarrow} x = \tfrac{-1\pm\sqrt{17}}{-2} = \tfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$
   Ainsi, la réponse est $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ (car $x > 0$).

plus d'indications

2.16 Analyse : problèmes d'optimisation

Résolution de l'exercice 222

- **On fait un schéma.**



- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Fonction à optimiser : Volume $= V(r;h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$.

  Contrainte : Pythagore : $r^2 + h^2 = 30^2 \iff r^2 = 900 - h^2$.

  Après substitution, on a : $V(h) = \frac{\pi}{3}\big(900h - h^3\big)$.

  Domaine d'intérêt : $]0, 30[$.

- **On fait le tableau de variation.**

  Dérivée factorisée : $V'(h) = \pi(300 - h^2)$.

h	0		$\sqrt{300}$		30
$V'(x)$	+	+	0	−	−
comportement de $V(x)$		↗	⌒	↘	

$\Longrightarrow$ maximum global en $h = \sqrt{300}$

- **On donne la réponse demandée.**

  Les dimensions du cône de volume maximal sont $h = \sqrt{300}$ cm et $r = \sqrt{600}$ cm.

  Le volume maximal est $2000\sqrt{3}\,\pi$ cm^3.

Remarque

On peut aussi isoler h de la contrainte ce qui donne $h = \sqrt{900 - r^2}$. En substituant dans le volume, on trouve $V(r) = \frac{\pi}{3}\big(r^2\sqrt{900 - r^2}\big)$ et le domaine d'intérêt est $]0, 30[$. On dérive par rapport à r, on fait le tableau de variation de V et on constate les mêmes conclusions (les calculs sont plus techniques !).

Résolution de l'exercice 223

- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Les coûts sont donnés par

$$\text{Coûts} \;=\; \overbrace{1.8\left(6+\frac{v^2}{300}\right)h}^{\text{prix du carburant pour le trajet}} \;+\; \underbrace{75h}_{\text{salaire du conducteur pour le trajet}}$$

  On doit se débarrasser de l'une des deux variables. La question portant sur la vitesse, il est plus efficace de substituer h. [...] Après substitution, on obtient

$$C(v) = 0.9v + \frac{12870}{v}$$

  Il faut minimiser cette fonction sur le domaine d'intérêt $]0, +\infty[$.

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée factorisée est $C'(v) = \dfrac{0.9(v^2 - 14300)}{v^2}$.

v	0		$\sqrt{14300}$	
$C'(v)$	↯	$-$	0	$+$
comportement de $C(v)$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

  $\Longrightarrow$ minimum global en $v = \sqrt{14300}$

- **On donne la réponse demandée.**

  La vitesse correspondante aux coûts minimaux est de $v = \sqrt{14300} \cong 119.58 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

  Les coûts correspondants sont d'environ CHF 215.25.

Résolution de l'exercice 224

- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  L'aire du rectangle est donnée par

$$\begin{array}{rcccc} & \text{Aire} & = & \text{base} & \cdot\ \text{hauteur} \\ \iff & A(\alpha) & = & 2\cos(\alpha) & \cdot\ \sin(\alpha) \end{array}$$

  Il faut maximiser cette fonction sur le domaine d'intérêt $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée factorisée est $A'(\alpha) = 2\big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big) = 2\big(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\big)\big(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\big)$.

  En utilisant le fait que $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$, on obtient $A'(\alpha) = 4\big(\cos(\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2}\big)\big(\cos(\alpha) + \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$.

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\alpha)$	2	$+$	0	$-$	-2
comportement de $A(\alpha)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

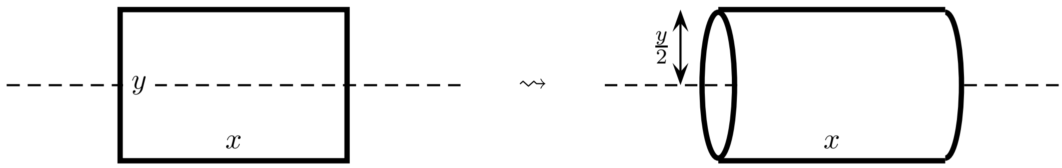
$\Longrightarrow$ maximum global en $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

- **On donne la réponse demandée.**

  Il y a exactement un rectangle dont l'aire est maximale. Il correspond à un angle α de $\frac{\pi}{4}$ et son aire est $A(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Résolution de l'exercice 225

- **On fait un schéma.**



- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Le périmètre du rectangle de côté x et y est une contrainte : $2x + 2y = 60 \iff x + y = 30$.

  Le volume du cylindre obtenu avec un axe parallèle au côté x est donné par

$$\begin{aligned} & \text{Volume} &=& \quad \text{base} & \cdot & \quad \text{hauteur} \\ \iff & V(x;y) &=& \quad \pi(\tfrac{y}{2})^2 & \cdot & \quad x \end{aligned}$$

  On doit se débarrasser de l'une des deux variables, il est plus aisé de substituer $x = 30 - y$.

  Après substitution, on obtient

$$V(y) = \tfrac{\pi}{4}(30y^2 - y^3)$$

  Il faut minimiser cette fonction sur le domaine d'intérêt $]0, 30[$.

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée factorisée est $V'(y) = \frac{3\pi}{4}(20 - y)y$.

y	0		20		30
$V'(y)$	0	$+$	0	$-$	$-$
comportement de $V(y)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

$\implies$ maximum global en $y = 20$

- **On donne la réponse demandée.**

  Les dimensions sont de 10 centimètres pour le côté qui deviendra la hauteur du cylindre et 20 centimètres pour le côté qui deviendra la base du cylindre.

Résolution de l'exercice 226

- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Le volume est donné par
  $$\begin{aligned} \text{Volume} &= \quad\text{base} &&\cdot \text{ hauteur} \\ \iff V(x) &= (40-2x)^2 &&\cdot \quad x \end{aligned}$$

  Il faut maximiser cette fonction sur le domaine d'intérêt $]0,20[$.

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée factorisée est $V'(x) = 4(20-x)(20-3x)$.

x	0		$\frac{20}{3}$		20
$V'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
comportement de $V(x)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

  $\Longrightarrow$ maximum global en $x = \dfrac{20}{3}$

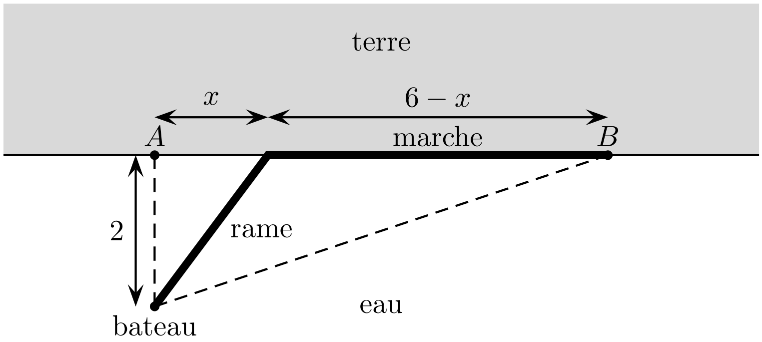
- **On donne la réponse demandée.**

  Puisque $x = \frac{20}{3}$, un côté de la base vaut $40 - 2\cdot\frac{20}{3} = \frac{80}{3}$. C'est le diamètre cherché.

  Ainsi le rayon de la pizza vaut $\frac{40}{3} \cong 13.3$cm.

Résolution de l'exercice 227

- **On fait un schéma.**



- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Le temps de parcours est donné par

$$\begin{aligned} \text{Temps total} &= \text{temps de rame} + \text{temps de marche} \\ \iff T(x) &= \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{6-x}{5} \end{aligned}$$

  Il faut minimiser cette fonction sur le domaine d'intérêt $[0,6]$.

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée factorisée est $T'(x) = \dfrac{5x - 3\sqrt{x^2+4}}{15\sqrt{x^2+4}}$.

  Elle s'annule en $x = \frac{3}{2}$ ($-\frac{3}{2}$ est une fausse solution ajoutée en élevant au carré chaque membre de l'équation $5x = 3\sqrt{x^2+4}$).

x	0		$\frac{3}{2}$		6
$T'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
comportement de $T(x)$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$	

$\Longrightarrow$ minimum global en $x = \dfrac{3}{2}$

- **On donne la réponse demandée.**

  L'homme doit ramer jusqu'à exactement 1.5 km du point A. Cela lui prendra un temps minimal de 1 heure et 44 minutes.

  Pour le temps maximal, il faut regarder au bord du domaine d'intérêt.

  (a) Pour $x = 0$, cela fait un temps de 1 heure et 52 minutes.

  (b) Pour $x = 6$, cela fait un temps de 2 heure, 6 minutes et 29 secondes.

  Le temps maximal est donc de 2 heure, 6 minutes et 29 secondes.

Résolution de l'exercice 228

1. Pour la consommation, c'est la vitesse au compteur du bateau qui compte, donc v (c'est la vitesse observée par rapport à l'eau).

   Pour la vitesse qui est utilisée pour trouver le temps de parcours, il faut tenir compte de la vitesse du bateau pour un observateur au bord de l'eau, donc $v - 10$.

   La consommation est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Consommation de carburant} &= \text{consommation par heure} \cdot \text{temps de parcours en heures} \\ \iff C(v) &= \qquad 2v^2 \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \frac{40}{v-10} \end{aligned}$$

2. **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

   Il faut minimiser la fonction $C(v) = \dfrac{80v^2}{v-10}$ sur le domaine d'intérêt $]10, +\infty[$.

   On fait le tableau de variation.

   La dérivée factorisée est $C'(v) = \dfrac{80v(v-20)}{(v-10)^2}$.

v	10		20	
$C'(v)$	$\lightning$	$-$	0	$+$
comportement de $C(v)$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

   $\Longrightarrow$ minimum global en $v = 20$

   On donne la réponse demandée.

   La vitesse qui minimise la consommation de carburant est $v = 20\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

3. La consommation minimale est $C(20) = 3200$ litres.

   Par conséquent, la réponse est non : il ne peut pas réussir une telle expédition (à moins d'embarquer 200 litres dans un baril, ce qui pourrait avoir une influence sur les fonctions utilisées).

Résolution de l'exercice 229

Remarquons que la donnée précise que R est considéré constant, les variables sont l'angle α, le rayon r et la hauteur h. On peut faire l'optimisation avec n'importe laquelle de ces 3 variables.

- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**
  Les variables r et h sont liées par la contrainte donnée par Pythagore.

  Le périmètre du secteur (sans les deux côtés de longueur R) est donné par $R\alpha$ (par définition des radians).

$$h^2 + r^2 = R^2 \iff h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

  Le volume du cône est donné par

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \tfrac{1}{3} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur} \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

  Il faut maximiser cette fonction sur le domaine d'intérêt $]0, R[$.

  On peut soit dériver le carré de cette fonction (si on n'aime vraiment pas les racines carrées), soit dériver directement la fonction ci-dessus (ce qui a été fait).

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée est

$$V'(r) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

  Sur le domaine de définition, elle s'annule (en $r = 0$ et) en $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R \cong 0.82R$.

  Son tableau de signes est

r	0		$\frac{\sqrt{6}}{3}R$		R
$V'(r)$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$
comportement de $V(r)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

$$\Longrightarrow \quad \text{maximum global en } r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$$

- **On donne la réponse demandée.**

  Le volume maximal associé est

$$V\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right) = \ldots = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$$

  Pour construire le cône, il vaut mieux connaître l'angle α. Pour cela, on remarque que le périmètre de la base du cône est égal au périmètre du secteur.

$$2\pi r = R\alpha \iff \alpha = \frac{2\pi r}{R}$$

  L'angle correspondant au volume maximal est le suivant (et il est indépendant de R).

$$\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

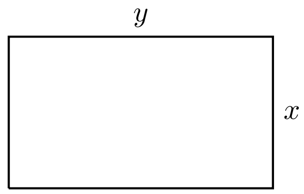
plus d'indications

Problèmes d'optimisation pour réviser

Résolution de l'exercice 230

Le périmètre vaut p (c'est un nombre fixé à l'avance).

On fait un schéma (voir ci-contre).



Fonction à optimiser : Aire $= A(x;y) = xy$.

Contrainte : Périmètre $= p = 2x + 2y \iff y = \frac{p}{2} - x$.

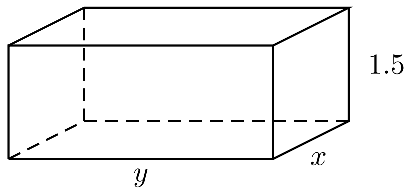
Après substitution, l'aire devient : $A(x) = \frac{p}{2}x - x^2$.

Domaine d'intérêt : $\left]0, \frac{p}{2}\right[$.

On dérive, on fait le tableau de variation et on constate un **maximum** pour $x = \frac{p}{4}$, $y = \frac{p}{4}$ avec une aire de $\frac{p^2}{16}$.

Résolution de l'exercice 231

On fait un schéma (voir ci-contre).



Fonction à optimiser : Surface $= S(x;y) = xy + 3x + 3y$.

Contrainte : Volume $= 300 = 1.5xy \iff y = \frac{200}{x}$.

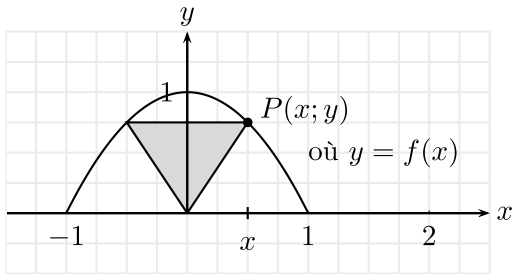
Après substitution, on a : $S(x) = 200 + 3x + \frac{600}{x}$.

Domaine d'intérêt : $]0, \infty[$.

On dérive, on fait le tableau de variation de S et on constate un **minimum** pour $x = \sqrt{200}$ m, $y = \sqrt{200}$ m.
La surface minimale est $200 + 6\sqrt{200}$ m$^2 \cong 284.853$ m^2.

Résolution de l'exercice 232

On fait le graphe de la fonction f (voir ci-contre).



Contrainte implicite :
le point $P(x;y)$ est sur le graphe de f, donc $y = f(x)$!

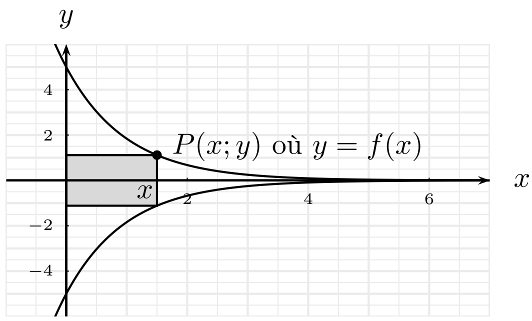
Fonction à optimiser : Aire $= A(x) = \dfrac{2x\, f(x)}{2} = x - x^3$.

Domaine d'intérêt : $]0,1[$.

On dérive, on fait le tableau de variation de A et on constate un **maximum** pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2}{3}$.

Résolution de l'exercice 233

On fait le graphe des fonctions f et g (voir ci-contre).



Contrainte implicite :
le point $P(x;y)$ est sur le graphe de f, donc $y = f(x)$!
On utilise aussi la symétrie d'axe x puisque $g(x) = -f(x)$.

Fonction à optimiser : Périmètre $= P(x) = 2x + 4f(x)$.

Domaine d'intérêt : $]0,\infty[$.

On dérive, on fait le tableau de variation de P et on constate un **minimum** pour $x = \ln(10)$, $y = \frac{1}{2}$.

Résolution de l'exercice 234

- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  L'aire du triangle est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \tfrac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \quad x \quad \cdot \quad f(x) \end{aligned}$$

  Il faut maximiser la fonction $\text{Aire}(x) = \frac{3}{2}x^2e^{-\frac{x}{2}}$ sur le domaine d'intérêt $]0, +\infty[$.

- **On fait le tableau de variation.**

x	0		4	
$\text{Aire}'(x)$	0	$+$	0	$-$
comportement de $\text{Aire}(x)$		↗	⌒	↘

$\Longrightarrow$ maximum global en $x = 4$

- **On donne la réponse demandée.**

  Le triangle pour lequel l'aire est maximale a les sommets $O(0,0)$, $A(4; \cong 1.624)$ et $B(4; 0)$.

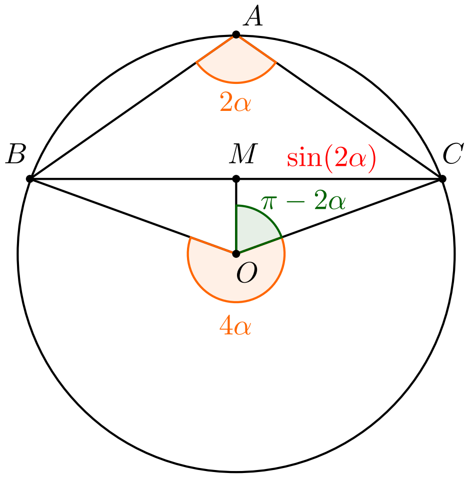
Problèmes d'optimisation avancés

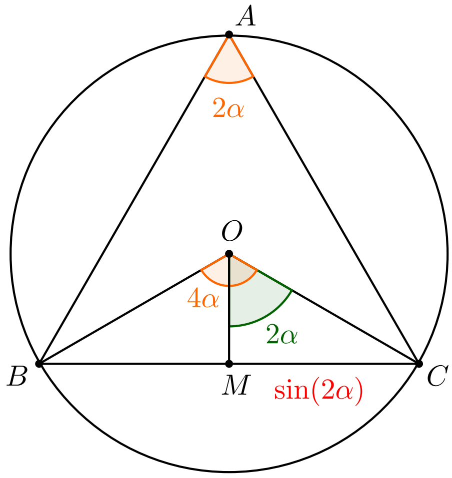
Résolution de l'exercice 235

- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Par le théorème de l'angle au centre, l'angle $\widehat{BOC}$ qui est en face de l'angle 2α vaut 4α.

  Ainsi, si M est le point milieu du segment $[BC]$, l'angle $\widehat{OMC}$ du triangle OMC vaut 2α ou $\pi - 2\alpha$ (cela dépend si le segment $[BC]$ passe sur ou sous le point O).





  En faisant «sin-opp-hyp» dans le triangle rectangle OMC, on trouve que la longueur de $[MC]$ vaut $\sin(2\alpha)$ et qu'ainsi la base du triangle ABC est

$$\boxed{\text{base} = 2\sin(2\alpha)}$$

  Remarquons que si le segment $[BC]$ contient le point O, ce résultat est évidemment vrai ($\alpha = \frac{\pi}{4}$).

  En faisant «tan-opp-adj» dans le triangle rectangle AMC, on trouve la hauteur du triangle ABC

$$\boxed{\text{hauteur} = \frac{\sin(2\alpha)}{\tan(\alpha)}}$$

  L'aire du triangle ABC est donnée par la fonction

$$\boxed{A(\alpha) = \frac{\sin^2(2\alpha)}{\tan(\alpha)}}$$

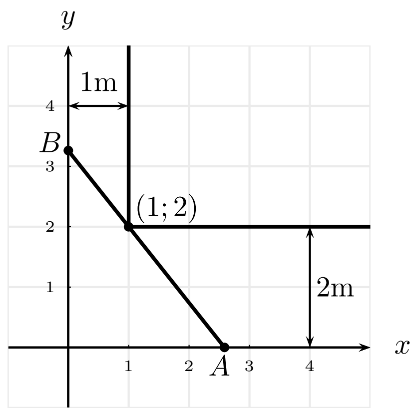
  Or, comme $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, on peut simplifier l'aire.

$$\boxed{A(\alpha) = 4\cos^3(\alpha)\sin(\alpha) \text{ pour } \alpha \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[} \ \big(\text{car } 2\alpha \in \left]0, \pi\right[\big)$$

  plus d'indications

Résolution de l'exercice 236

On commence par se rendre compte que minimiser la longueur de la barre revient à maximiser la longueur du segment $[AB]$.



On établit l'équation de la droite de pente m qui passe par le point $(1;2)$ (voir QuickQuiz question 19, l'équation à l'origine de l'équation de la tangente).

$$y = 2 + m(x-1)$$

En posant $y=0$, on trouve le point $A(1-\frac{2}{m};0)$. En posant $x=0$, on trouve le point $B(0;2-m)$.

La longueur du segment est $\|\overrightarrow{AB}\|$: $l(m) = \sqrt{\left(\frac{2}{m}-1\right)^2 + \left(2-m\right)^2}$.

Le domaine d'intérêt est $I =]-\infty, 0[$ (la pente est négative).

Minimiser une fonction est équivalent à minimiser son carré (car la fonction «élever au carré» est croissante).

On dérive la fonction $f(m) = \left(\frac{2}{m}-1\right)^2 + \left(2-m\right)^2$. Deux méthodes :

1. Méthode brutale.

$$\left(\left(\frac{2}{m}-1\right)^2 + \left(2-m\right)^2\right)' = \left(\frac{4}{m^2} - \frac{4}{m} + 1 + 4 - 4m + m^2\right)' = -\frac{8}{m^3} + \frac{4}{m^2} - 4 + 2m$$

$$= \frac{2m^4 - 4m^3 + 4m - 8}{m^3} \overset{!}{=} \frac{2m^3(m-2) + 4(m-2)}{m^3} = \frac{(m-2)(2m^3+4)}{m^3} = \frac{2(m-2)(m^3+2)}{m^3}$$

2. Méthode subtile.

$$\left(\left(\frac{2}{m}-1\right)^2 + \left(2-m\right)^2\right)' = \left((2-m)^2 \cdot \frac{1}{m^2} + (2-m)^2\right)' = \left((2-m)^2\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\right)'$$

$$= -2(2-m)\cdot\left(1+\frac{1}{m^2}\right) + (2-m)^2\cdot\left(-\frac{2}{m^3}\right) = -2(2-m)\cdot\left(1+\frac{1}{m^2}+(2-m)\frac{1}{m^3}\right)$$

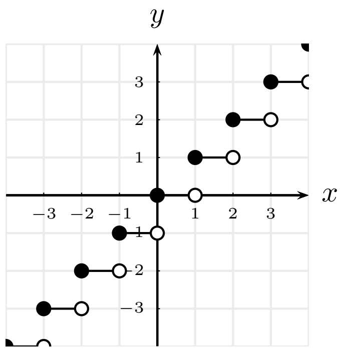
$$= 2(m-2)\cdot\frac{m^3+m+(2-m)}{m^3} = \frac{2(m-2)(m^3+2)}{m^3}$$

$\boxed{\text{plus d'indications}}$

2.17 Analyse : continuité

Résolution de l'exercice 237

1. La fonction ent n'est pas continue.
   En effet, elle n'est pas continue en 1 car



$$\lim_{x\to 1} \operatorname{ent}(x) \neq \operatorname{ent}(1)$$

En effet, on a

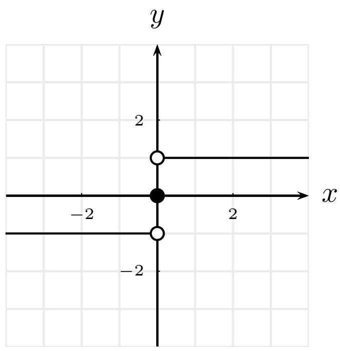
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \operatorname{ent}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \operatorname{ent}(x) = 1$$

Cela signifie que $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{ent}(x)$ n'existe pas, et qu'elle ne peut donc pas être égale à $\operatorname{ent}(1)$ qui vaut 1.

Remarquons que cette fonction est continue à droite.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \operatorname{ent}(x) \neq \operatorname{ent}(x_0) \text{ pour tout } x_0 \in \mathbb{R}$$

La fonction sgn n'est pas continue.
En effet, elle n'est pas continue en 0 car



$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) \neq \operatorname{sgn}(0)$$

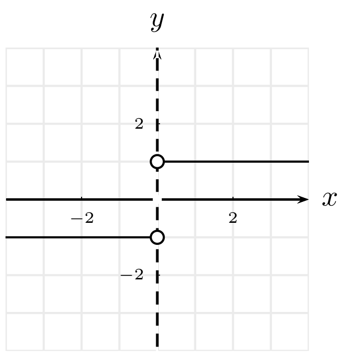
En effet, on a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

Cela signifie que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ n'existe pas, et qu'elle ne peut donc pas être égale à $\operatorname{sgn}(0)$ qui vaut 0.

Remarquons que ce contre-exemple montre que la fonction sgn n'est ni continue à droite, ni continue à gauche.

2. La fonction sgn est maintenant continue, car on voit que quelque soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a



$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(x_0)$$

Le contre-exemple précédent ne fonctionne plus, puisque 0 ne fait maintenant plus partie du domaine de définition.

Preuve : soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on distingue deux cas :

(a) si $x_0 > 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{sgn}(x) = 1 = \operatorname{sgn}(x_0)$
(car $\operatorname{sgn}(x) = 1$ dès que $x > 0$) ;

(b) si $x_0 < 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{sgn}(x) = -1 = \operatorname{sgn}(x_0)$
(car $\operatorname{sgn}(x) = -1$ dès que $x < 0$).

Corrections de l'exercice 238

1. (a) Le domaine de définition de $f \pm g$ est $D_f \cap D_g$ car $f \pm g$ est définie si et seulement si f et g sont définies.

   (b) Soit $x_0 \in D_f \cap D_g$. On montre que $f \pm g$ est continue en x_0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = (f \pm g)(x_0)$. Pour cela, on utilise la propriété des limites suivante.

   $$\boxed{\lim_{x \to a} \Big(f(x) \pm g(x) \Big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)}$$

   Pour $-$, c'est une combinaison de la propriété de l'addition avec celle de la multiplication d'une fonction par le nombre -1 (puisque la soustraction est définie par $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$).

   En effet, on a

   $$\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) \overset{\text{définition}}{\underset{\text{de } f \pm g}{=}} \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x) \big) \overset{\text{propriété}}{\underset{\text{des limites}}{=}} \lim_{x \to x_0} f(x) \ \pm \ \lim_{x \to x_0} g(x) \overset{f \text{ et } g \text{ sont}}{\underset{\text{continues en } x_0}{=}} f(x_0) \pm g(x_0) \overset{\text{définition}}{\underset{\text{de } f \pm g}{=}} (f \pm g)(x_0)$$

2. (a) Le domaine de définition de λf est D_f car λf est définie si et seulement si f est définie.

   (b) Soit $x_0 \in D_f$. On montre que λf est continue en x_0. Pour cela, on utilise la propriété des limites suivante.

   $$\boxed{\lim_{x \to a} \Big(\lambda f(x) \Big) = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x)}$$

   En effet, on a

   $$\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) \overset{\text{définition}}{\underset{\text{de } \lambda f}{=}} \lim_{x \to x_0} \big(\lambda f(x) \big) \overset{\text{propriété}}{\underset{\text{des limites}}{=}} \lambda \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{f \text{ est}}{\underset{\text{continue en } x_0}{=}} \lambda f(x_0) \overset{\text{définition}}{\underset{\text{de } \lambda f}{=}} (\lambda f)(x_0)$$

3. (a) Le domaine de définition de fg est $D_f \cap D_g$ car fg est définie si et seulement si f et g sont définies.

   (b) Soit $x_0 \in D_f \cap D_g$. On montre que fg est continue en x_0. Pour cela, on utilise la propriété des limites suivante.

   $$\boxed{\lim_{x \to a} \Big(f(x)g(x) \Big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)}$$

   En effet, on a

   $$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) \overset{\text{définition}}{\underset{\text{de } fg}{=}} \lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x) \big) \overset{\text{propriété}}{\underset{\text{des limites}}{=}} \lim_{x \to x_0} f(x) \ \cdot \ \lim_{x \to x_0} g(x) \overset{f \text{ et } g \text{ sont}}{\underset{\text{continues en } x_0}{=}} f(x_0) \cdot g(x_0) \overset{\text{définition}}{\underset{\text{de } fg}{=}} (fg)(x_0)$$

4. (a) Le domaine de définition de $\frac{f}{g}$ est $D_f \cap (D_g \setminus Z_g)$ car $\frac{f}{g}$ est définie si et seulement si f est définie et g est définie et non nulle.

   (b) Soit $x_0 \in D_f \cap (D_g \setminus Z_g)$. On montre que $\frac{f}{g}$ est continue en x_0. Pour cela, on utilise la propriété des limites suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad \text{si } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \text{ et si } g(x) \neq 0 \text{ pour } x \text{ proche de } a}$$

   En effet, on a

$$\lim_{x\to x_0} \left(\tfrac{f}{g}\right)(x) \underset{\text{de } \frac{f}{g}}{\overset{\text{définition}}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{des limites}}{\overset{\text{propriété}}{=}} \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \underset{\text{continues en } x_0}{\overset{f \text{ et } g \text{ sont}}{=}} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \underset{\text{de } \frac{f}{g}}{\overset{\text{définition}}{=}} \left(\tfrac{f}{g}\right)(x_0)$$

5. (a) Le domaine de définition de $f \circ g$ est $D = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$ car $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ est définie si et seulement si $x \in D_g$ (pour que $g(x)$ existe) et $g(x) \in D_f$ (pour que $f\big(g(x)\big)$ existe).

   (b) Soit $x_0 \in D$. On montre que $f \circ g$ est continue en x_0. Cette fois, on utilise la définition de la continuité différemment.

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \quad \text{se traduit par} \quad g(x) \to g(x_0) \text{ lorsque } x \to x_0$$

   En effet, on a

$$\lim_{x\to x_0} \big(f \circ g\big)(x) \underset{\text{de } f\circ g}{\overset{\text{définition}}{=}} \lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) \underset{\text{continue en } x_0}{\overset{g \text{ est}}{=}} \lim_{g(x)\to g(x_0)} f\big(g(x)\big) \underset{\text{continue en } g(x_0)}{\overset{f \text{ est}}{=}} f\big(g(x_0)\big) \underset{\text{de } f\circ g}{\overset{\text{définition}}{=}} \big(f \circ g\big)(x_0)$$

Moralité. $\boxed{\text{Les combinaisons } (\pm,\ \cdot,\ \div,\ \circ) \text{ de fonctions élémentaires continues sont continues.}}$

Utilisation de ces arguments pour montrer la continuité de fonctions

a) On a $f_1(x) = |x| = \sqrt{x^2}$. C'est la composition des fonctions élémentaires continues $\sqrt{x}$ et x^2. f_1 est donc continue.

b) La fonction f_2 est continue car $x^3 - 1$ est continue (puisque x^3 et 1 sont continues et que la soustraction de fonctions continues est continue), $x^4 + 2x$ est continue (puisque x^4 et $2x$ sont continues ($2x$ est continue parce x est continue et que la multiplication d'une fonction continue par un nombre est continue)), et parce que la division de deux fonctions continues est continue.

c) La fonction f_3 est continue car $1 + x$ est continue et qu'on obtient f_3 en composant les fonctions $\cos(x)$, $\ln(x)$, $|x|$ et $1 + x$.

d) La fonction f_4 est continue car x^2 est continue, donc $\frac{1}{x^2}$ aussi, de même que $-\frac{1}{x^2}$ et on obtient f_4 en composant la fonction e^x avec $-\frac{1}{x^2}$.

2.18 Analyse : études de fonctions

Corrections de l'exercice 239

On considère la fonction f définie dans l'encadré ci-dessous et les factorisations de f' et f''.

$$\boxed{f(x) = x^4 e^{-x}} \qquad f'(x) = x^3(4-x)e^{-x} \qquad f''(x) = x^2(x-2)(x-6)e^{-x}$$

Compléter les tableaux de comportement suivants.

x		0	
$f(x)$	$+$	0	$+$
comp. de f			

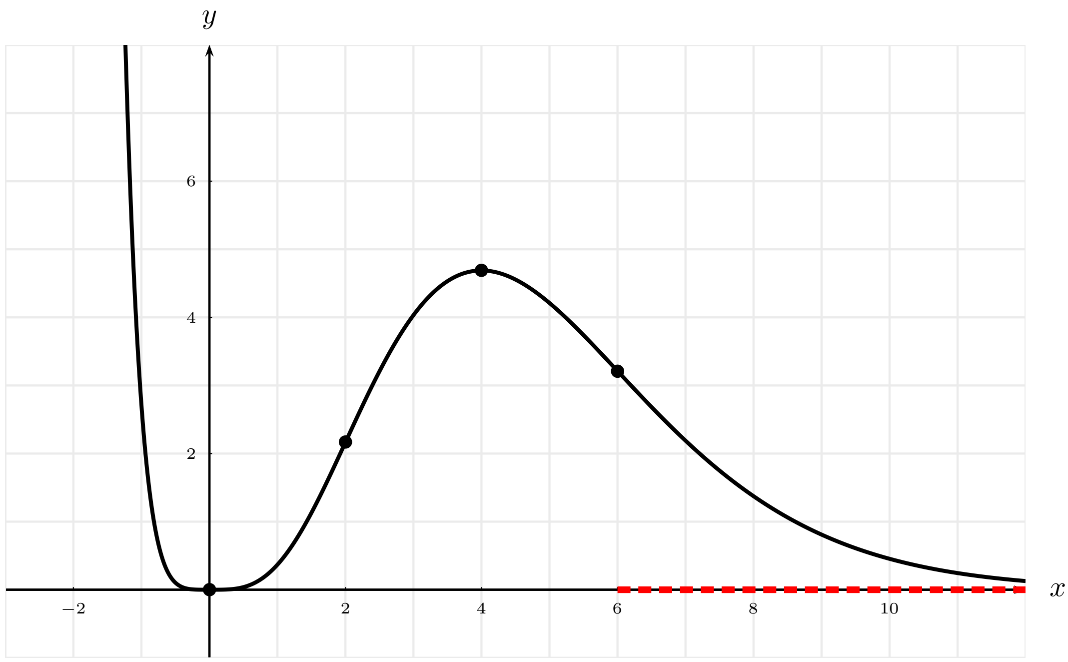
x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
comp. de f					

x		0		2		6	
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
comp. de f		?					

Compléter le tableau de comportement suivant.

x		0		2		4		6	
$f(x)$	$+$	0	$+$	2.17	$+$	4.69	$+$	3.21	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
comp. de f									

En déduire, en utilisant le fait que la fonction a une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$, la représentation graphique du graphe de f que l'on dessinera ci-dessous.



Corrections de l'exercice 240

On considère la fonction f définie dans le cadre ci-dessous et les factorisations de f, f' et f''.

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3+x^2-2}{x^2-2}} = \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x^2-2} \qquad f'(x) = \frac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2} \qquad f''(x) = \frac{4x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$$

En utilisant le fait que la fonction a deux asymptotes verticales d'équations $x = -\sqrt{2} \cong -1.41$ et $x = \sqrt{2} \cong 1.41$, compléter les tableaux de comportement suivants.

x		-1.41		1		1.41	
$f(x)$	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$
comp. de f							

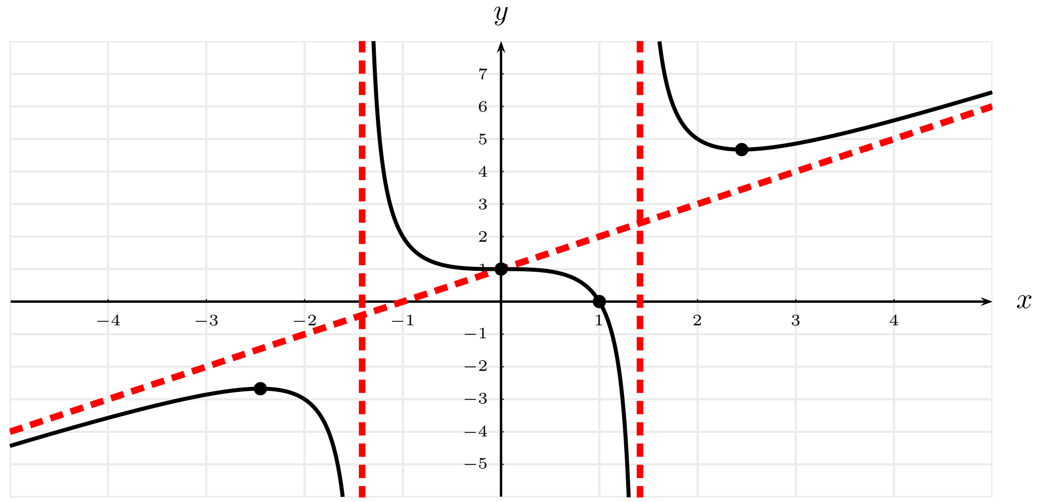
x		-2.45		-1.41		0		1.41		2.45	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
comp. de f											

x		-1.41		0		1.41	
$f''(x)$	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$
comp. de f							

Compléter le tableau de comportement suivant.

x		-2.45		-1.41		0		1		1.41		2.45	
$f(x)$	$-$	-2.67	$-$	$\lightning$	$+$	1	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	4.67	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$
comp. de f													

En déduire, en utilisant le fait que la fonction a une asymptote oblique d'équation $y = x+1$, la représentation graphique du graphe de f que l'on dessinera ci-dessous.



Corrections de l'exercice 241

On considère la fonction f définie dans l'encadré ci-dessous et les factorisations de f' et f''.

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{8}\ln^3(x^2)} \qquad f'(x)=\frac{3\ln^2(x^2)}{4x} \qquad f''(x)=\frac{3\ln(x^2)\big(4-\ln(x^2)\big)}{4x^2}$$

En utilisant le fait que la fonction a une asymptote verticale d'équation $x=0$, compléter les tableaux de comportement suivants.

x		-1		0		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
comp. de f							

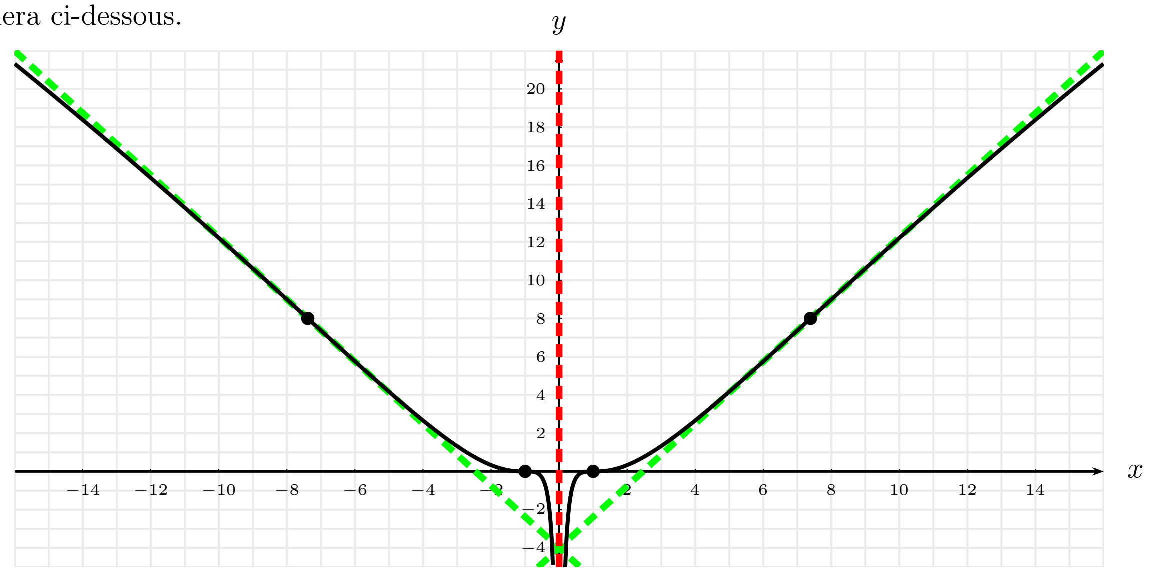
x		-1		0		1	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$	0	$+$
comp. de f							

x		-7.39		-1		0		1		7.39	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$	0	$-$
comp. de f											

Compléter le tableau de comportement suivant.

x		-7.39		-1		0		1		7.39	
$f(x)$	$+$	8	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$	8	$+$
$f'(x)$	$-$	-1.62	$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$	0	$+$	1.62	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$	0	$-$
comp de f											

En déduire la représentation graphique des tangentes aux points d'inflexion et du graphe de f que l'on dessinera ci-dessous.



Corrections de l'exercice 242

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$\boxed{f(x)=\frac{x^3+9x^2}{2(x^2-1)}}=\frac{x^2\ (x+9)}{2\ (x^2-1)}\qquad\qquad f'(x)=\frac{x\ \ (x-3)\ (x^2+3x+6)}{2\ (x^2-1)^2}$$

On voit les valeurs qui sont mises dans le tableau :

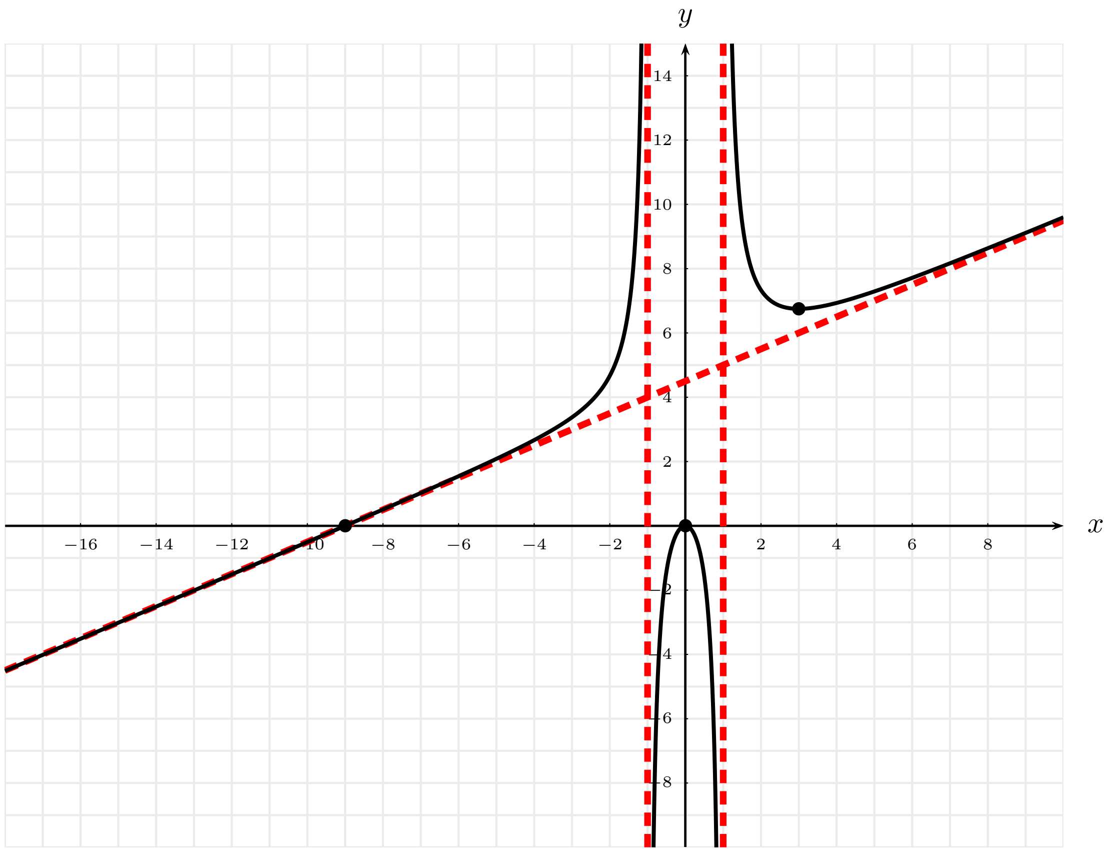
Pour f : 0, -9, ± 1.

Pour f' : 0, 3, ± 1.
Le polynôme x^2+3x+6 ne s'annule pas, car son discriminant est négatif.

On peut ainsi remplir le tableau de comportement.

x		-9		-1		0		1		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$	6.75	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
comp de f											

On dessine la droite $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$, et les droites verticales d'équations $x=-1$ et $x=1$. Et on relie.



Résolution de l'exercice 243

On remplit le comportement.

x		-3		-1		1		2	
$f(x)$	$+$	$\lightning$	$+$	2	$+$	$\lightning$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	$\lightning$	$-$	0	$-$	$\lightning$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$
comp. de f				?		?			

On constate deux soucis (les cases ont été mises en rouge).

1. Le premier soucis est qu'on a un point à tangente horizontal, et il est impossible de dessiner à droite de ce point en continuant avec une tangente horizontale et en respectant le comportement de la colonne suivante (un « ?» a été placé).
2. Le deuxième soucis est que le comportement proche de l'asymptote verticale ne correspond pas à ce qu'on attend d'une asymptote verticale. Cela pourrait jouer si on avait un trou lorsque $x \overset{<}{\to} 1$.

   Pour rappel, voici les quatre comportements possibles en cas d'asymptote verticale.

Comme il n'y a qu'une seule erreur, elle ne peut se trouver que sur les signes entre $x = -1$ et $x = 1$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 244

1. **Parité**

   On a
   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{2x^2-1} = -f(x) \text{ pour tout } x \in D$$
   Donc, la fonction est impaire.

2. **Comportement asymptotique local et à l'infini :**

   Il y a deux AV : $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Il y a une AO : $y = \frac{1}{2}x$.

3. **Tableau de comportement**

   La fonction f est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.
   On factorise la dérivée de façon à pouvoir faire aisément son tableau de signes.
   $$f'(x) = \left(\frac{x^3}{2x^2-1}\right)' = \frac{3x^2 \cdot (2x^2-1) - x^3 \cdot 4x}{(2x^2-1)^2}$$
   on peut factoriser par x^2.
   $$= \frac{x^2\big(3(2x^2-1) - 4x^2\big)}{(2x^2-1)^2} = \frac{x^2\big(2x^2-3\big)}{(2x^2-1)^2}$$

   On factorise la dérivée seconde de façon à pouvoir faire aisément son tableau de signes.
   $$f''(x) = \left(\frac{x^2\big(2x^2-3\big)}{(2x^2-1)^2}\right)' \overset{!}{=} \left(\frac{2x^4-3x^2}{(2x^2-1)^2}\right)'$$
   $$= \frac{\big(8x^3-6x\big) \cdot (2x^2-1)^2 - \big(2x^4-3x^2\big) \cdot \big(2(2x^2-1) \cdot 4x\big)}{(2x^2-1)^4}$$
   on simplifie par $(2x^2-1)$.
   $$= \frac{\big(8x^3-6x\big) \cdot (2x^2-1) - \big(2x^4-3x^2\big) \cdot \big(8x\big)}{(2x^2-1)^3}$$
   on factorise par $2x$.
   $$= \frac{2x\Big(\big(4x^2-3\big) \cdot (2x^2-1) - 4\big(2x^4-3x^2\big)\Big)}{(2x^2-1)^3} = \frac{2x\Big(2x^2+3\Big)}{(2x^2-1)^3}$$

plus d'indications

Correction de l'exercice 245

1. **Parité**

   On a
   $$f(-x) = 5 \cdot (-x) \cdot e^{-x^2} = -5xe^{-x^2} = -f(x) \;\text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$
   Donc, la fonction est impaire.

2. **Comportement asymptotique local et à l'infini :**

   Pas de comportement local.
   Il y a une AH : $y = 0$.

3. **Tableau de comportement**

   La fonction f est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

   Factorisation des dérivées.
   $$f'(x) \;=\; 5e^{-x^2} + 5xe^{-x^2} \cdot (-2x) \;=\; 5e^{-x^2}(1-2x^2) \;=\; -10\left(x^2 - \tfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$
   $$\begin{aligned} f''(x) \;&=\; \left(5e^{-x^2}(1-2x^2)\right)' \;=\; 5e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (1-2x^2) \;+\; 5e^{-x^2} \cdot (-4x) \\ &=\; -10xe^{-x^2} \cdot \left((1-2x^2)+2\right) \;=\; -10xe^{-x^2} \cdot (3-2x^2) \;=\; 20x\left(x^2 - \tfrac{3}{2}\right)e^{-x^2} \end{aligned}$$

   En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe , ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs .
   $$f(x) = 5x \; e^{-x^2} \qquad f'(x) = 5e^{-x^2} \; (1-2x^2) \qquad f''(x) = -10x \; e^{-x^2} \; (3-2x^2)$$

   On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :
   $$1 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \tfrac{1}{2} \iff x = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2} \cong \pm 0.71$$
   $$3 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \tfrac{3}{2} \iff x = \pm\tfrac{\sqrt{6}}{2} \cong \pm 1.22$$

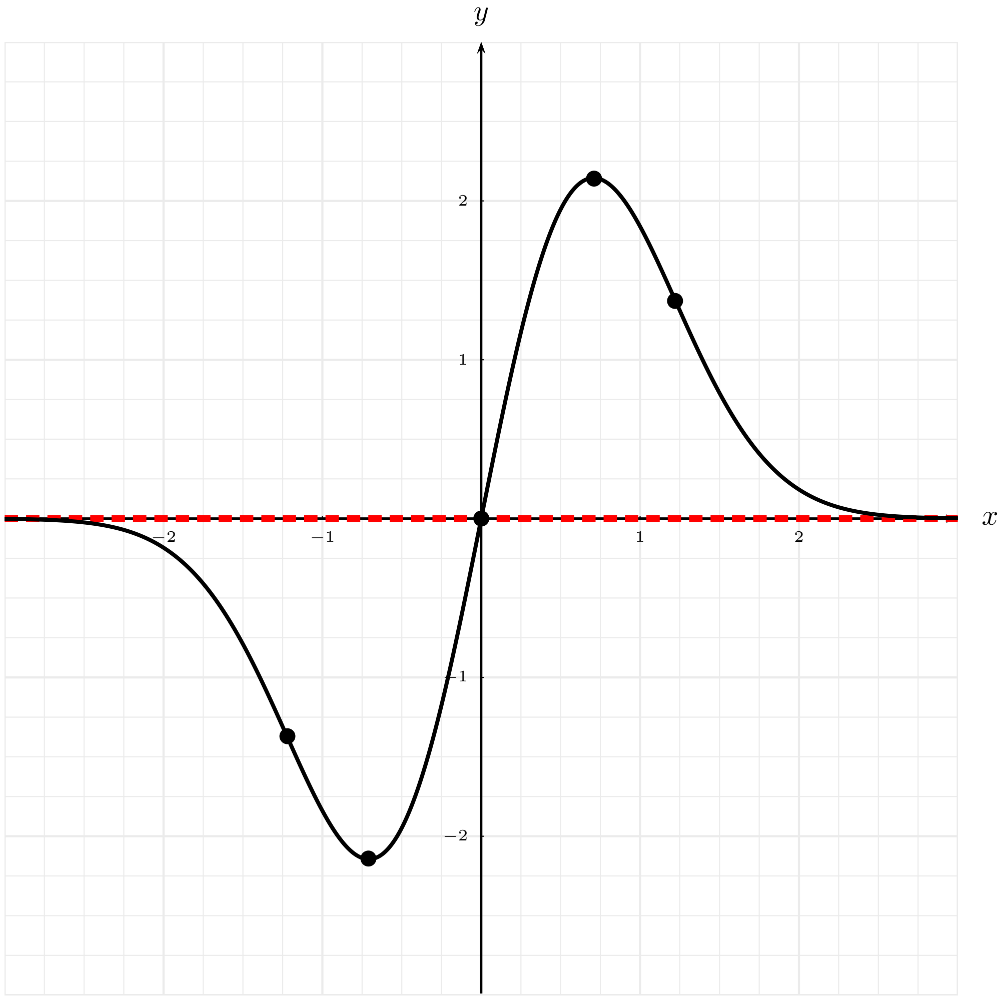
   Le tableau de comportement est :

x		-1.22		-0.71		0		0.71		1.22	
$f(x)$	$-$	-1.37	$-$	-2.14	$-$	0	$+$	2.14	$+$	1.37	$+$
$f'(x)$	$-$	-2.23	$-$	0	$+$	5	$+$	0	$-$	-2.23	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
comp. de f											

   En utilisant le fait que la fonction est impaire (on peut aussi faire cela quand la fonction est paire), on peut faire un tableau de comportement sur la partie positive ou nulle du domaine de définition (on utilisera la propriété de symétrie d'une fonction paire ou impaire pour dessiner son graphe).

x	0		0.71		1.22	
$f(x)$	0	$+$	2.14	$+$	1.37	$+$
$f'(x)$	5	$+$	0	$-$	-2.23	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
comp. de f						

4. **Graphe**



Correction de l'exercice 246

1. **Parité**
   La fonction n'est ni paire, ni impaire, car son domaine de définition $D =]0, +\infty[$ a un défaut de symétrie, puisque la fonction n'est pas définie en -1, mais est définie en 1.

2. **Comportement asymptotique local et à l'infini :**
   Il y a une AV : $x = 0$.
   Il y a une AH : $y = 0$.

3. **Tableau de comportement**
   La fonction f est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

   On factorise la dérivée.

$$f'(x) = \left(\frac{1-12\ln(x)}{x^3}\right)' = \frac{\left(-\frac{12}{x}\right)\cdot x^3 \;-\; \big(1-12\ln(x)\big)\cdot 3x^2}{x^6}$$

on simplifie par x^2 et on utilise le fait que $-\frac{12}{x}\cdot x = -12$.

$$= \frac{-12 \;-\; 3\big(1-12\ln(x)\big)}{x^4} = \frac{36\ln(x) \;-\; 15}{x^4} = 3\cdot\frac{12\ln(x)-5}{x^4}$$

On factorise la dérivée seconde.

$$f''(x) = 3\cdot\left(\frac{12\ln(x)-5}{x^4}\right)' = 3\cdot\frac{\left(\frac{12}{x}\right)\cdot x^4 \;-\; \big(12\ln(x)-5\big)\cdot 4x^3}{x^8}$$

on simplifie par x^3 et on utilise le fait que $\frac{12}{x}\cdot x = 12$.

$$= 3\cdot\frac{12 \;-\; 4\big(12\ln(x)-5\big)}{x^5} = 3\cdot\frac{32 \;-\; 48\ln(x)}{x^5} = 48\cdot\frac{2-3\ln(x)}{x^5}$$

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = \frac{\boxed{1 - 12\ln(x)}}{x^3} \qquad f'(x) = 3 \cdot \frac{\boxed{12\ln(x) - 5}}{x^4} \qquad f''(x) = 48 \cdot \frac{\boxed{2 - 3\ln(x)}}{x^5}$$

Les facteurs entourés en rouge ne sont pas définis pour $x \leqslant 0$. Les éclairs en rouge correspondent à ces facteurs qui ne sont pas définis pour $x = 0$.

On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$1 - 12\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = \tfrac{1}{12} \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{\frac{1}{12}} \cong 1.09$$

$$12\ln(x) - 5 = 0 \iff \ln(x) = \tfrac{5}{12} \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{\frac{5}{12}} \cong 1.52$$

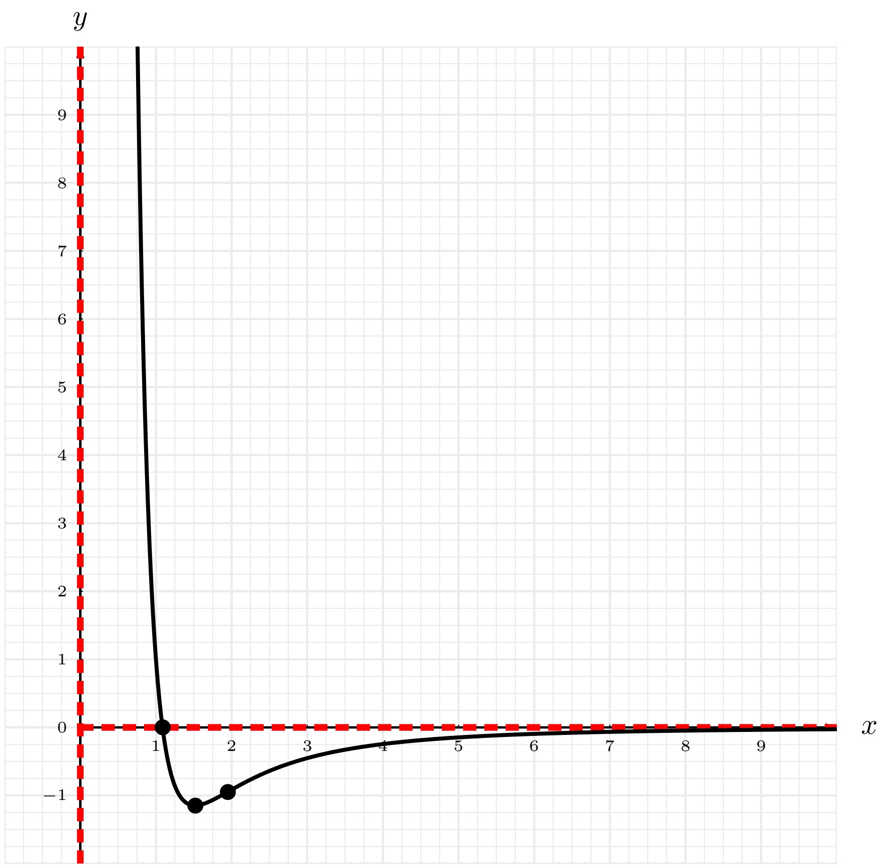
$$2 - 3\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = \tfrac{2}{3} \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{\frac{2}{3}} \cong 1.95$$

Le tableau de comportement est :

x	0		1.09		1.52		1.95	
$f(x)$	$\lightning$	$+$	0	$-$	-1.15	$-$	-0.95	$-$
$f'(x)$	$\lightning$	$-$	-8.60	$-$	0	$+$	0.63	$+$
$f''(x)$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
comp. de f								

Si le tableau de signes commence en 0, c'est uniquement parce que le domaine de défintion est $D =]0, +\infty[$. Ce n'est pas dû à la parité, contrairement aux deux études de fonctions précédentes.

4. Graphe



Réponses de l'exercice 247

1. **Parité**
On a $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction n'est donc ni paire, ni impaire, car le domaine de définition a un défaut de symétrie.

Comportement au bord du domaine de définition
Le bord de D est $\partial D = \{1, \pm\infty\}$.

(a) Comportement local.
On a
$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{(\frac{2}{0})}{=} \pm\infty \quad\Longrightarrow\quad \text{AV d'équation } x = 1$$

(b) Comportement à l'infini.
Comme la fonction est rationnelle de degré 4 sur degré 3, on sait qu'il y a une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$. On a
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4}{x^4 - x} = 2 \\ h &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^4}{x^3-1} - \frac{2x(x^3-1)}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^3-1} = 0 \end{aligned}$$
On a donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

Tableau de comportement
La fonction f est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes. On factorise les dérivées.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x^4}{x^3-1}\right)' = \frac{8x^3\cdot(x^3-1) - 2x^4\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{2x^3\cdot\big(4(x^3-1)-3x^3\big)}{(x^3-1)^2} = \frac{2x^3\,(x^3-4)}{(x^3-1)^2} \\ f''(x) &= \left(\frac{2x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}\right)' \overset{!}{=} \left(\frac{2x^6-8x^3}{(x^3-1)^2}\right)' \\ &= \frac{(12x^5-24x^2)\cdot(x^3-1)^2 \;-\; (2x^6-8x^3)\cdot 2(x^3-1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^4} \\ &= \frac{12x^2\Big((x^3-2)\cdot(x^3-1) \;-\; (x^6-4x^3)\Big)}{(x^3-1)^3} = \frac{12x^2\big(x^3+2\big)}{(x^3-1)^3} \end{aligned}$$

On aurait pu calculer la dérivée seconde autrement
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}\right)' \\ &= \frac{\big(6x^2\cdot(x^3-4) + 2x^3\cdot 3x^2\big)\cdot(x^3-1)^2 \;-\; 2x^3(x^3-4)\cdot 2(x^3-1)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^4} \\ &= \frac{\big(6x^2\cdot(x^3-4) + 2x^3\cdot 3x^2\big)\cdot(x^3-1) \;-\; 2x^3(x^3-4)\cdot 2\cdot 3x^2}{(x^3-1)^3} \\ &= \frac{6x^2\cdot\big(((x^3-4)+x^3)(x^3-1) \;-\; 2x^3(x^3-4)\big)}{(x^3-1)^3} \\ &= \frac{6x^2\cdot\big((2x^3-4)(x^3-1) \;-\; 2x^3(x^3-4)\big)}{(x^3-1)^3} \\ &= \frac{6x^2\cdot\big((2x^6-6x^3+4) \;-\; 2x^6+8x^3\big)}{(x^3-1)^3} = \frac{6x^2\,(2x^3+4)}{(x^3-1)^3} = \frac{12x^2\,(x^3+2)}{(x^3-1)^3} \end{aligned}$$
Le calcul parait plus compliqué, mais si dans l'expression de f' on avait eu $(x^3-4)^n$ avec $n > 1$, on aurait ainsi facilement pu factoriser par $(x^3-4)^{n-1}$.

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^3-1} \qquad f'(x) = \frac{2x^3\,(x^3-4)}{(x^3-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2\,(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

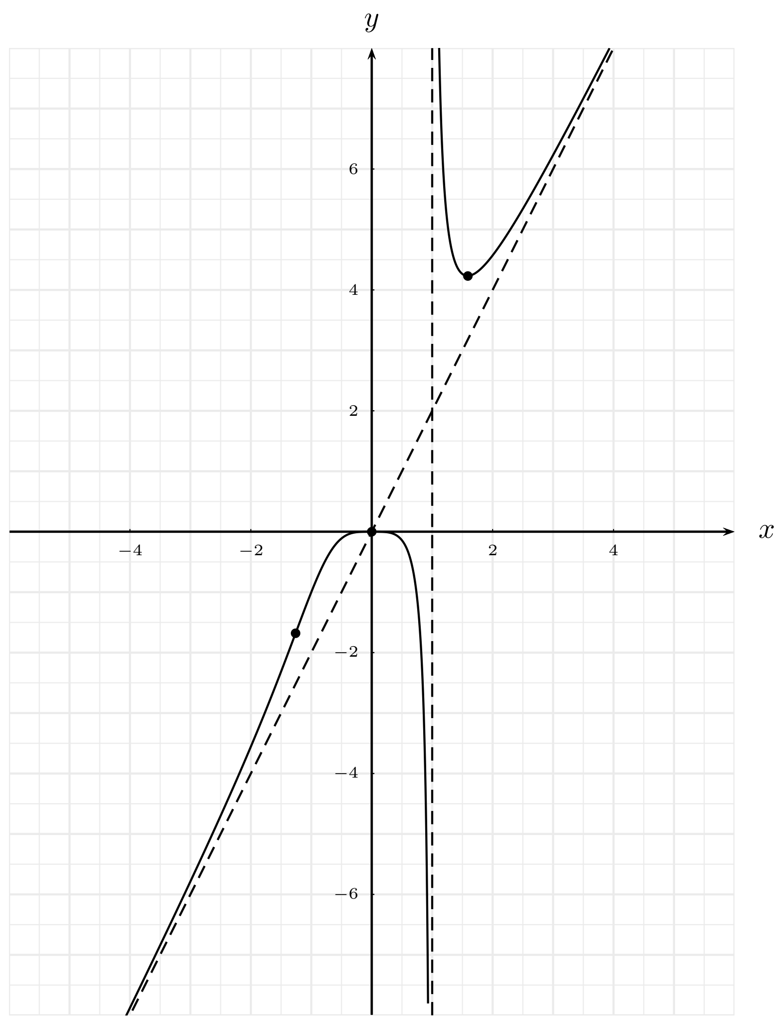
$$x^3-1=0 \iff x^3=1 \iff x=1$$
$$x^3-4=0 \iff x^3=4 \iff x=\sqrt[3]{4}\cong 1.59$$
$$x^3+2=0 \iff x^3=-2 \iff x=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}\cong -1.26$$

Le tableau de comportement est :

x		-1.26		0		1		1.59	
$f(x)$	$-$	-1.68	$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$	4.23	$+$
$f'(x)$	$+$	2.67	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$
comp. de f									

2. Pente au point d'inflexion elle vaut $f'(-\sqrt[3]{2}) = \dfrac{-4\cdot -6}{(-3)^2} = \dfrac{8}{3} \cong 2.67$.

3. Graphe



Réponses de l'exercice 248

1. **Parité**

   On a $f(x) = \dfrac{x-4}{x} \cdot e^x$. Ainsi, la fonction s'annule en $x = 4$, mais pas en $x = -4$.

   Il y a un défaut de symétrie, la fonction n'est donc ni paire, ni impaire.

   Comportement au bord du domaine de définition

   On a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ainsi $\partial D = \{0, \pm\infty\}$.

   (a) Comportement local.

   On a

   $$\lim_{x\to 0} \overbrace{\left(1 - \frac{4}{x}\right)}^{\to\pm\infty} \overbrace{e^x}^{\to 1} = \pm\infty \quad\Longrightarrow\quad \text{AV d'équation } x = 0$$

   Il y a donc une AV d'équation $x = 0$.

   (b) Comportement à l'infini.

   On a

   $$\lim_{x\to-\infty} \overbrace{\left(1 - \frac{4}{x}\right)}^{\to 1} \overbrace{e^x}^{\to 0} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \overbrace{\left(1 - \frac{4}{x}\right)}^{\to 1} \overbrace{e^x}^{\to+\infty} = +\infty$$

   Par conséquent, il y a une AH à gauche d'équation $y = 0$ et il y a peut-être une AO à droite. Regardons ce que serait sa pente.

   $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \overbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)}^{=1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

   Ainsi, il n'y a pas d'AO à droite.

2. **Tableau de comportement**

   La fonction f est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

   On factorise les dérivées

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x\right)' = \frac{4}{x^2} \cdot e^x + \left(1 - \frac{4}{x}\right) e^x = \left(\frac{4}{x^2} + 1 - \frac{4}{x}\right) e^x \\ &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} \cdot e^x = \frac{(x-2)^2}{x^2} \cdot e^x \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{(x-2)^2}{x^2} \cdot e^x\right)' = \frac{2(x-2)\cdot x^2 \; - \; (x-2)^2 \cdot 2x}{x^4} \cdot e^x + \frac{(x-2)^2}{x^2} \cdot e^x \\ &= \frac{(x-2)\big(2x \; - \; 2(x-2)\big)}{x^3} \cdot e^x + \frac{x(x-2)^2}{x^3} \cdot e^x \\ &= \frac{(x-2)\big(2x \; - \; 2(x-2) + x(x-2)\big)}{x^3} \cdot e^x \\ &= \frac{(x-2)\big(x^2 - 2x + 4\big)}{x^3} \cdot e^x \quad \begin{array}{l}\text{s'annule seulement en } x = 2, \\ \text{car le discriminant de } x^2 - 2x + 4 \text{ vaut } -12\end{array} \end{aligned}$$

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

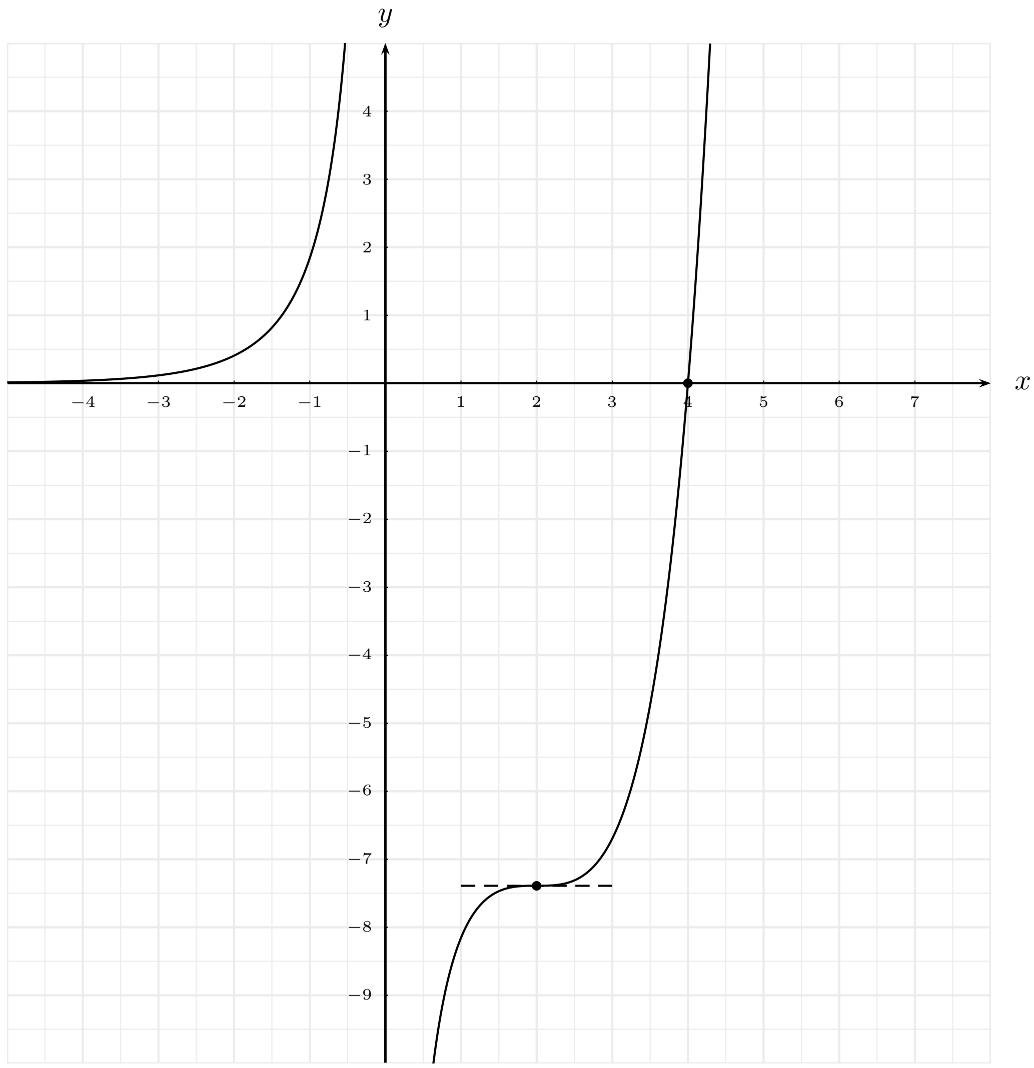
$$f(x) = \frac{x-4}{x} \cdot e^x \qquad f'(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2} \cdot e^x \qquad f''(x) = \frac{(x-2)\ (x^2-2x+4)}{x^3} \cdot e^x$$

Toutes les valeurs du tableaux se voient sur les expressions, sauf pour $x^2 - 2x + 4$ qui ne s'annule pas car son discriminant est négatif (il vaut $\Delta = 4 - 16 = -12$).

Le tableau de comportement est :

x		0		2		4	
$f(x)$	$+$	↯	$-$	-7.39	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	↯	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	↯	$-$	0	$+$	$+$	$+$
comp. de f							

3. Graphe



Réponses de l'exercice 249

a) **1. Parité**

On a $D =]0,\infty[$. Donc f n'est ni paire, ni impaire, car D a un défaut de symétrie.

Comportement au bord du domaine de définition

Le bord de D est $\partial D = \{0,+\infty\}$.

i. Comportement local.

On a

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(2x^2\ln(x) - x^2\right) \overset{(0\cdot(-\infty)-0)}{=} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x^2(2\ln(x)-1)\right) \overset{(0\cdot(-\infty))}{=} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\ln(x)-1}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{-\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} -x^2 = 0$$

Il y a donc un trou en $(0;0)$ (par la droite).

ii. Comportement à l'infini.

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(2\ln(x)-1) \overset{\left((+\infty)\cdot(+\infty)\right)}{=} +\infty$$

Il y a peut-être une AO à droite. Regardons ce que serait sa pente.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote oblique. En fait, $f(x) = x^2(2\ln(x)-1)$ est plus haute que x^2 pour $x > e$, car $2\ln(x) - 1 > 1$ ssi $x > e$.

2. Tableau de comportement

On factorise la fonction

$$f(x) \;=\; 2x^2\ln(x) - x^2 \;=\; x^2(2\ln(x)-1)$$

On factorise la dérivée.

$$f'(x) \;=\; \left(2x^2\ln(x) - x^2\right)' \;=\; 4x\cdot\ln(x) + 2x^2\cdot\frac{1}{x} - 2x \;=\; 4x\ln(x)$$

On factorise la dérivée seconde.

$$f''(x) \;=\; \left(4x\ln(x)\right)' \;=\; 4\ln(x) + 4x\frac{1}{x} \;=\; 4\big(\ln(x)+1\big)$$

En *visualisant* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = x^2 \boxed{(2\ln(x)-1)} \qquad f'(x) = 4x \cdot \boxed{\ln(x)} \qquad f''(x) = 4 \cdot \boxed{(\ln(x)+1)}$$

Les facteurs entourés en rouge ne sont pas définis pour $x \leqslant 0$. Les éclairs en rouge correspondent à ces facteurs qui ne sont pas définis pour $x = 0$.

On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$2\ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{\frac{1}{2}} \cong 1.65$$

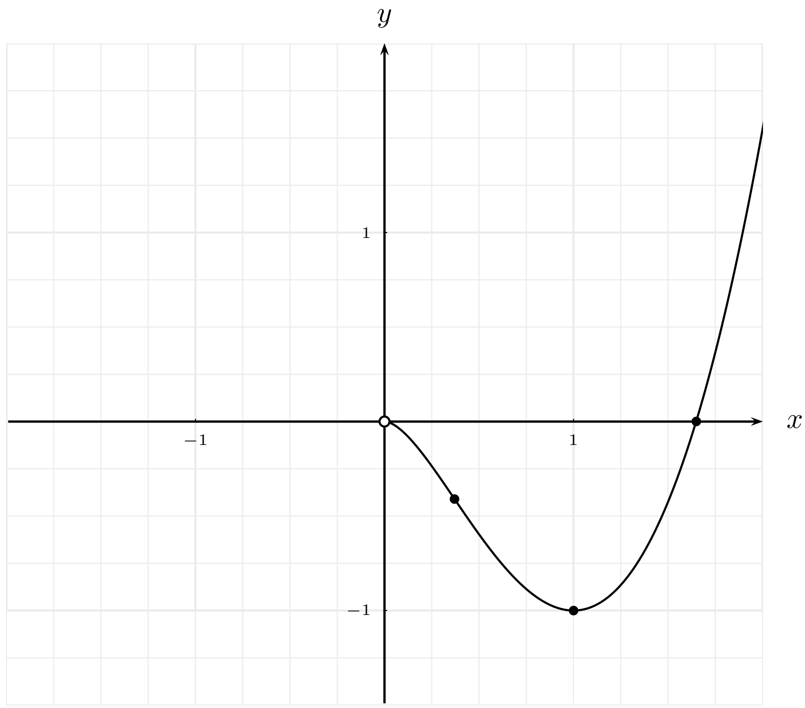
$$\ln(x) = 0 \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^0 = 1$$

$$\ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -1 \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{-1} \cong 0.37$$

Le tableau de comportement est :

x	0		0.37		1		1.65	
$f(x)$	$\lightning$	$-$	-0.41	$-$	-1	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\lightning$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$\lightning$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
comp. de f								

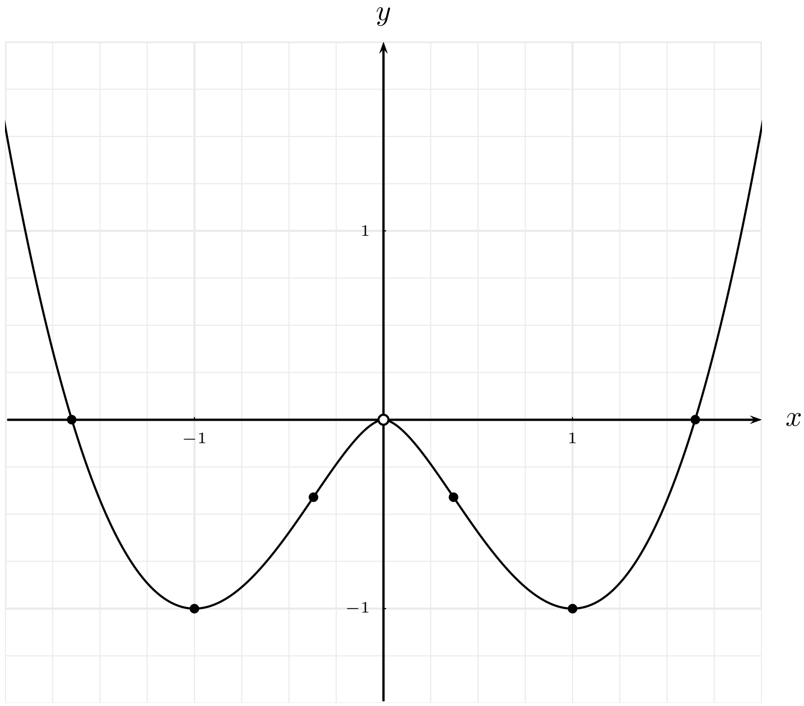
3. Graphe



b) On a $f(x) = 2x^2 \ln(x) - x^2 = x^2 \ln(x^2) - x^2 = g(x)$ lorsque $x \in]0, \infty[$.

L'avantage de l'expression de droite est qu'elle est valable pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et que cette fonction est paire (car $(-x)^2 = x^2$). Ainsi, on construit le graphe de g en prenant celui de f et sa symétrie par rapport à l'axe Oy.

L'étude reste donc la même et le graphe de g est ainsi.



Réponses de l'exercice 250

1. **Parité**
   On a $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. La fonction n'est donc ni paire, ni impaire.

   Comportement asymptotique
   Le bord de D est $\partial D=\{-1,\pm\infty\}$.

   (a) Comportement local

   $$\lim_{x\to-1} f(x) \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^4}{(x+1)(x^2-x+1)} \overset{\text{simpl.}}{=} \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^3}{x^2-x+1} \overset{(\frac{0}{3})}{=} 0$$

   On a donc un trou en $(-1;0)$.

   (b) Comportement à l'infini
   C'est une fonction rationnelle de degré 4 sur degré 3, on sait qu'il y a une asymptote oblique d'équation $y=mx+h$.

   $$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^4}{x^4+x}=1$$

   $$\begin{aligned} h &= \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^4\ -\ x(x^3+1)}{x^3+1}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1\ -\ (x^4+x)}{x^3+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3+6x^2+3x+1}{x^3+1}=4\end{aligned}$$

   Ainsi on a une asymptote oblique d'équation $y=x+4$.

   Tableau de comportement
   La fonction f est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

   On factorise la dérivée

   $$\begin{aligned}\left(\frac{(x+1)^4}{x^3+1}\right)' &= \frac{4(x+1)^3(x^3+1)\ -\ (x+1)^4(3x^2)}{(x^3+1)^2}\\ &= \frac{(x+1)^3\big(4(x^3+1)\ -\ 3x^2(x+1)\big)}{(x^3+1)^2} = \frac{(x+1)^3\big(x^3-3x^2+4\big)}{(x^3+1)^2}\\ &\underset{\text{Horner}}{\overset{\text{Gauss}}{=}} \frac{(x+1)^3(x+1)(x^2-4x+4)}{(x^3+1)^2} \underset{\text{remarquable}}{\overset{\text{Identité}}{=}} \frac{(x+1)^4(x-2)^2}{(x^3+1)^2}\end{aligned}$$

   Étrange, la puissance de $(x+1)$ est restée la même !

   Calculons la limite demandée.

   $$\lim_{x\to-1} f'(x) \underset{(\star)}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^4(x-2)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} \overset{\text{simpl.}}{=} \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2} \overset{(\frac{0}{9})}{=} 0$$

   À l'étape $(\star)$, on a réutilisé la factorisation trouvée lors du comportement local.

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = \frac{(x+1)^4}{x^3+1} \qquad f'(x) = \frac{(x+1)^4\ (x-2)^2}{(x^3+1)^2}$$

Toutes les valeurs sautent aux yeux, on remarque que pour $x = -1$, il y a deux facteurs qui sont concernés simultanément : $(x+1)^4$ et x^3+1 (avec ou sans le carré).

Le tableau de comportement est

x		-1		2	
$f(x)$	$-$	(0)	$+$	9	$+$
$f'(x)$	$+$	(0)	$+$	0	$+$
comp. de f					

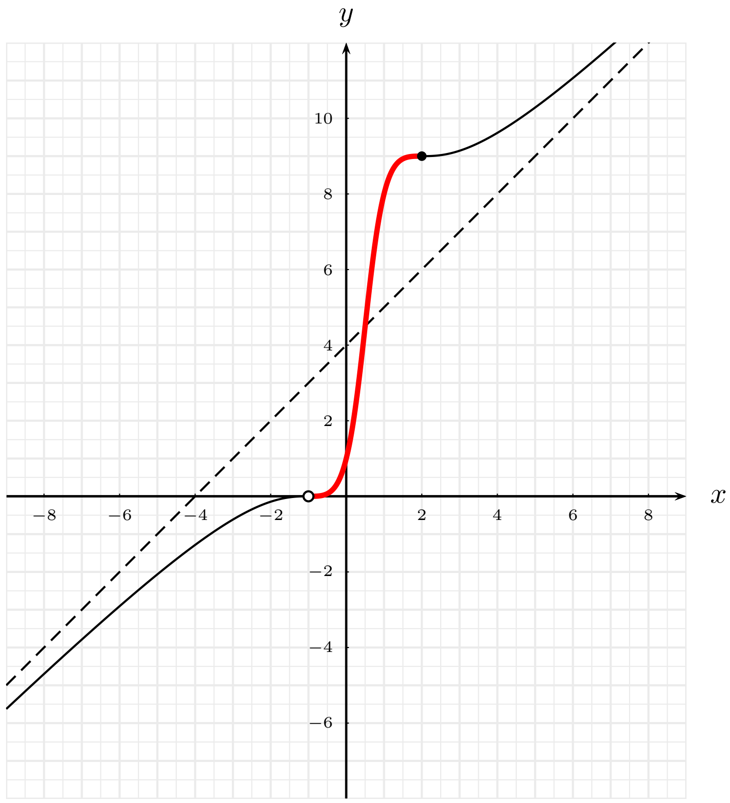
Les nombres entre parenthèses correspondent aux limites pour $x \to -1$ (rappelons $-1 \notin D$).

Intersection avec l'asymptote oblique : pour trouver l'intersection avec l'AO, on résout

$$f(x) = x + 4$$

En multipliant à gauche et à droite par $x^3 + 1$, on arrive à l'équation équivalente $6x^2 + 3x - 3 = 0$ qui se résout par Viète, on trouve la solution $x = \frac{1}{2}$ et la solution étrangère $x = -1 \notin D$. Le seul point d'intersection est donc le point $(\frac{1}{2}; \frac{9}{2})$.

Graphe de *f* : on sait qu'il y a un point d'inflexion entre les deux points à tangente horizontale, mais on ne sais pas exactement où précisément (il se trouve quelque part sur la partie dessinée en rouge).



La dérivée seconde montre qu'il n'y a qu'un point d'inflexion à tangente non horizontale et qu'il est bien sur le trait rouge. Coïncidence : il s'agit du point d'intersection avec l'AO !

Si on avait calculé la dérivée seconde, on aurait eu

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(x+1)^4(x-2)^2}{(x^3+1)^2}\right)' \\
&= \frac{\Big(4(x+1)^3(x-2)^2+(x+1)^4\big(2(x-2)\big)\Big)(x^3+1)^2 \ - \ (x+1)^4(x-2)^2\cdot 2(x^3+1)3x^2}{(x^3+1)^4} \\
&= \frac{(x+1)^3(x-2)\Big(\big(4(x-2)+2(x+1)\big)(x^3+1) \ - \ 6x^2(x+1)(x-2)\Big)}{(x^3+1)^3} \\
&= \frac{(x+1)^3(x-2)\Big((6x-6)(x^3+1) \ - \ 6x^2\big(x^2-x-2\big)\Big)}{(x^3+1)^3} \\
&= \frac{(x+1)^3(x-2)\Big(12x^2+6x-6\Big)}{(x^3+1)^3} = \frac{6(x+1)^3(x-2)\Big(2x^2+x-1\Big)}{(x^3+1)^3} \\
&\overset{\text{Viète}}{=} \frac{6(x+1)^3(x-2)(x+1)(2x-1)}{(x^3+1)^3} = \frac{6(x+1)^4(x-2)(2x-1)}{(x^3+1)^3}
\end{aligned}$$

Étrange, la puissance de $(x+1)$ est restée la même !

Calculons la limite quand x va vers -1 pour cette dérivée seconde.

$$\lim_{x\to -1} f''(x) \underset{(\star)}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to -1} \frac{6(x+1)^4(x-2)(2x-1)}{(x+1)^3(x^2-x+1)^3} \overset{\text{simpl.}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{6(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x^2-x+1)^3} \overset{(\frac{0}{27})}{=} 0$$

À l'étape $(\star)$, on a réutilisé la factorisation trouvée lors du comportement local.

Le tableau de comportement est

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
$f(x)$	$-$	(0)	$+$	$\frac{9}{2}$	$+$	9	$+$
$f'(x)$	$+$	(0)	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	(0)	$+$	0	$-$	0	$+$
comp. de f							

On voit bien qu'il y a un point d'inflexion entre les deux points d'inflexion à tangente horizontale.

2. Il est étrange qu'à chaque dérivée, la puissance de $(x+1)$ n'a pas diminuée de 1.

   Lorsqu'on a calculé le comportement local, on a simplifié l'expression fonctionnelle de f en
$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2-x+1} \qquad \text{Il faut se souvenir que } f \text{ n'est pas définie en } x=-1$$
   On peut utiliser cette expression fonctionnelle pour établir l'asymptote oblique et les dérivées (c'est plus simple !). C'est parce qu'on ne travaillait pas avec une expression fonctionnelle simplifiée que, précédemment, la puissance de $(x+1)$ ne diminuait pas de 1 à chaque dérivée.

   Refaisons le comportement à l'infini.
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3-x^2+x} = 1$$
$$\begin{aligned} h &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3 \ - \ x(x^2-x+1)}{x^2-x+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+1 \ - \ (x^3-x^2+x)}{x^2-x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+2x+1}{x^2-x+1} = 4 \end{aligned}$$
   Refaisons la dérivée.
$$\left(\frac{(x+1)^3}{x^2-x+1}\right)' = \frac{3(x+1)^2(x^2-x+1) \ - \ (x+1)^3(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)^2\big(3(x^2-x+1) \ - \ (x+1)(2x-1)\big)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{(x+1)^2(x^2-4x+4)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$\underset{\text{remarquable}}{\overset{\text{Identité}}{=}} \frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2}$$
   La dérivée seconde se calcule ainsi
$$\left(\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-x+1)^2}\right)'$$
$$= \frac{\Big(2(x+1)(x-2)^2+(x+1)^2 2(x-2)\Big)(x^2-x+1)^2-(x+1)^2(x-2)^2 2(x^2-x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^4}$$
$$= \frac{(x+1)(x-2)\Big(\big(2(x-2)+2(x+1)\big)(x^2-x+1) \ - \ 2(2x-1)(x+1)(x-2)\Big)}{(x^2-x+1)^3}$$
$$= \frac{(x+1)(x-2)\big((4x-2)(x^2-x+1) \ - \ (4x-2)(x^2-x-2)\big)}{(x^2-x+1)^3}$$
$$= \frac{2(x+1)(x-2)(2x-1)\big((x^2-x+1) \ - \ (x^2-x-2)\big)}{(x^2-x+1)^3} = \frac{6(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$$
   Il faut préciser que x^2-x+1 est toujours positif (c'est un polynôme irréductible). C'est le cas, car $\Delta = 1-4 < 0$ et le graphe de x^2-x+1 est une parabole orientée vers le haut.

   Le tableau de comportement ne change pas : il faut mettre les zéros de f et de f' lorsque $x=-1$ entre parenthèses, car 1 n'est pas dans le domaine de f. Un autre avantage d'avoir simplifié la fonction est de ne plus avoir besoin de calculer la limite quand x tend vers -1 pour f' (ou f'').

   Intersection avec l'asymptote oblique : pour trouver l'intersection avec l'AO, on résout
$$f(x) = x+4$$
   En travaillant avec l'expression simplifiée de f obtenue lors du comportement local, on se ramène à l'équation équivalente $6x=3$. On trouve donc le point $(\frac{1}{2}; \frac{9}{2})$

Réponses de l'exercice 251

1. **Parité**

   On a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $Z = \{2\}$. La fonction n'est ni paire, ni impaire, car Z a un défaut de symétrie.

   Comportement au bord du domaine de définition

   Le bord de D est $\partial D = \{0, \pm\infty\}$.

   (a) Comportement local.

   On a un trou en $(0;0)$ par la droite ($x > 0$) et une asymptote verticale par la gauche ($x < 0$). En effet on a :

   $$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} \overset{(-2e^{-\infty})}{=} 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} \overset{(-2e^{+\infty})}{=} -\infty$$

   (b) Comportement à l'infini.

   On a une asymptote oblique d'équation $y = x - 3$.

   $$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{x-2}^{\to 1}}{x} \cdot \overbrace{e^{-\frac{1}{x}}}^{\to e^0=1} = 1 \\ h &= \lim_{x\to\pm\infty} \Big((x-2)e^{-\frac{1}{x}} - x\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(x\big(e^{-\frac{1}{x}} - 1\big) - 2e^{-\frac{1}{x}}\Big) \\ &= \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}\right) - 2 \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\right) - 2 = -3 \end{aligned}$$

2. **Tableau de comportement**

   La fonction f est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

   On factorise la dérivée

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \Big((x-2)e^{-\frac{1}{x}}\Big)' = e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{x-2}{x^2}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \frac{x^2+x-2}{x^2} \overset{\text{Viète}}{=} \frac{(x+2)(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \end{aligned}$$

   On factorise la dérivée seconde en se rappelant que $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

   $$\begin{aligned} &\left(\frac{(x+2)(x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\right)' \\ &= \frac{\Big((x-1)e^{-\frac{1}{x}} + (x+2)e^{-\frac{1}{x}} + (x+2)(x-1)e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\Big)x^2 \; - \; (x+2)(x-1)e^{-\frac{1}{x}} \cdot 2x}{x^4} \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \frac{\big((x-1)x^2 + (x+2)x^2 + (x+2)(x-1)\big) \; - \; 2x(x+2)(x-1)}{x^4} \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \frac{\big(x^3 - x^2 \; + \; x^3 + 2x^2 \; + \; x^2 + x - 2\big) \; - \; 2x\big(x^2+x-2\big)}{x^4} \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \frac{5x-2}{x^4} = \frac{(5x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} \end{aligned}$$

   On voit qu'à chaque dérivée, le degré du dénominateur augmente de 2. C'est à cause de la dérivée interne de l'exponentielle.

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = (x-2)\ \boxed{e^{-\frac{1}{x}}} \qquad f'(x) = \frac{(x+2)\ (x-1)\ \boxed{e^{-\frac{1}{x}}}}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{(5x-2)\ \boxed{e^{-\frac{1}{x}}}}{x^4}$$

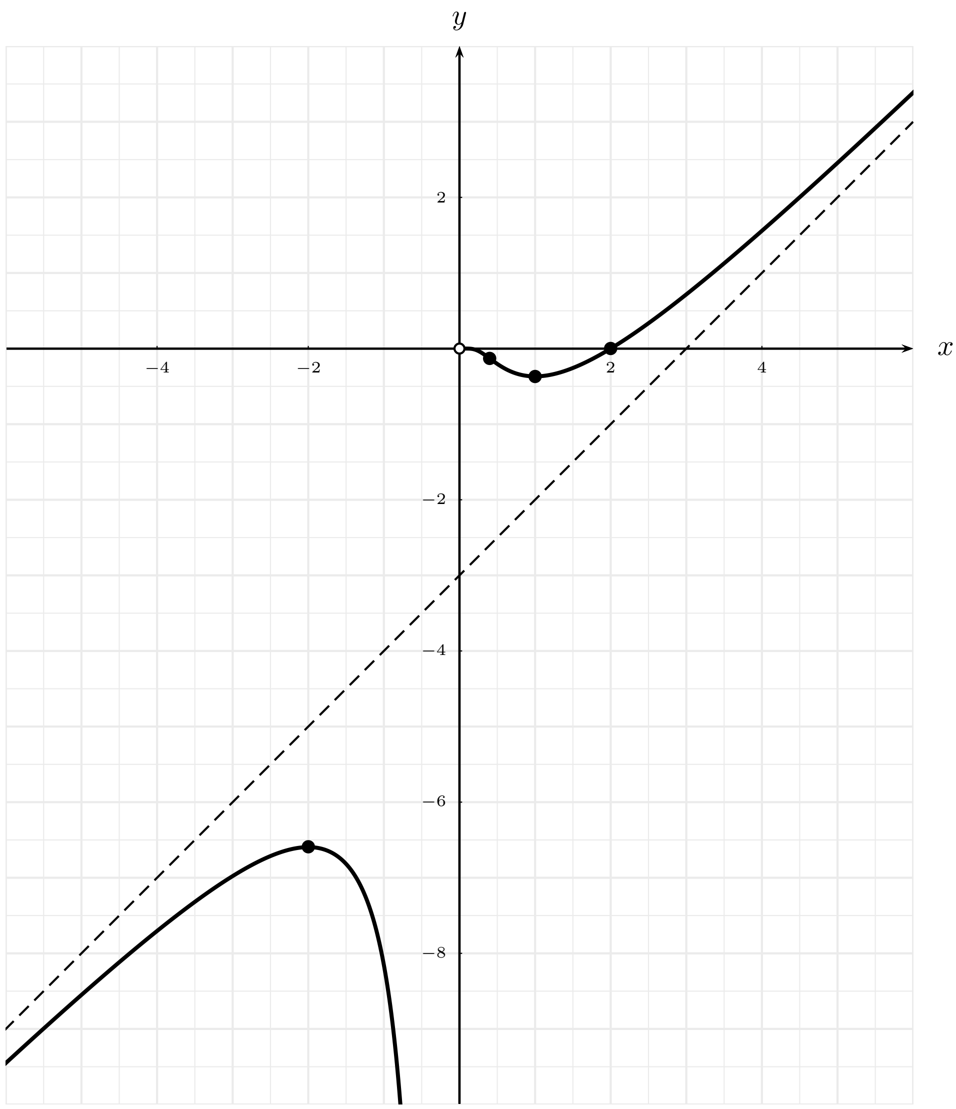
Les facteurs entourés en rouge ne sont pas définis pour $x = 0$. Les éclairs en rouge correspondent à ces facteurs.

Toutes les valeurs sautent aux yeux. Le zéro de $5x-2$ est $\frac{2}{5} = 0.4$.

Le tableau de comportement est :

x		-2		0		0.4		1		2	
$f(x)$	$-$	-6.59	$-$	$\lightning$	$-$	-0.13	$-$	-0.37	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
comp. de f											

3. Graphe



Réponses de l'exercice 252

1. (a) Le domaine de définition est $D =]0, \infty[\setminus \{\sqrt{e}\}$. Le domaine D n'étant pas symétrique, la fonction n'est ni paire, ni impaire.

   (b) Comportement asymptotique local : trou en $(0;0)$ par la droite et asymptote verticale d'équation $x = \sqrt{e}$.
   Comportement asymptotique à l'infini. Il n'y a ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique ($m \to 0$ et $h \to -\infty$).

   (c) La fonction f est déjà factorisée. Les dérivées sont :

$$f'(x) = \frac{3 \cdot \big(1 - 2\ln(x)\big) - 3x \cdot \big(-\frac{2}{x}\big)}{(1-2\ln(x))^2} = \frac{3 - 6\ln(x) + 6}{(1-2\ln(x))^2} = \frac{9 - 6\ln(x)}{(1-2\ln(x))^2}$$

   et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{6}{x} \cdot (1-2\ln(x))^2 - \big(9 - 6\ln(x)\big) \cdot 2(1-2\ln(x)) \cdot \big(-\frac{2}{x}\big)}{(1-2\ln(x))^4} = \frac{-\frac{6}{x} \cdot (1-2\ln(x)) + \big(9-6\ln(x)\big) \cdot \big(\frac{4}{x}\big)}{(1-2\ln(x))^3} \\ &= \frac{-6(1-2\ln(x)) + 4(9-6\ln(x))}{x(1-2\ln(x))^3} = \frac{30 - 12\ln(x)}{x(1-2\ln(x))^3} \end{aligned}$$

   (d) En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe.

$$f(x) = \frac{3x}{\boxed{1 - 2\ln(x)}} \qquad f'(x) = \frac{\boxed{9 - 6\ln(x)}}{\boxed{(1-2\ln(x))^2}} \qquad f''(x) = \frac{\boxed{30 - 12\ln(x)}}{x\,\boxed{(1-2\ln(x))^3}}$$

   Les facteurs entourés en rouge ne sont pas définis pour $x \leqslant 0$. Les éclairs en rouge correspondent à ces facteurs.

   Les valeurs sont $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \cong 1.65$, $e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \cong 4.48$ et $e^{\frac{5}{2}} = \sqrt{e^5} \cong 12.18$.

   Le tableau de comportement est :

x	0		1.65		4.48		12.182	
$f(x)$	↯	$+$	↯	$-$	-6.72	$-$	-9.137	$-$
$f'(x)$	↯	$+$	↯	$+$	0	$-$	-0.375	$-$
$f''(x)$	↯	$+$	↯	$-$	$-$	$-$	0	$+$
comp. de f								

Trou en $(0;0)$; maximum local en $(\sqrt{e^3}; -\frac{3}{2}\sqrt{e^3}) \cong (4.48; -6.72)$; point d'inflexion en $(\sqrt{e^5}; -\frac{3}{4}\sqrt{e^5}) \cong (12.18; -9.14)$.

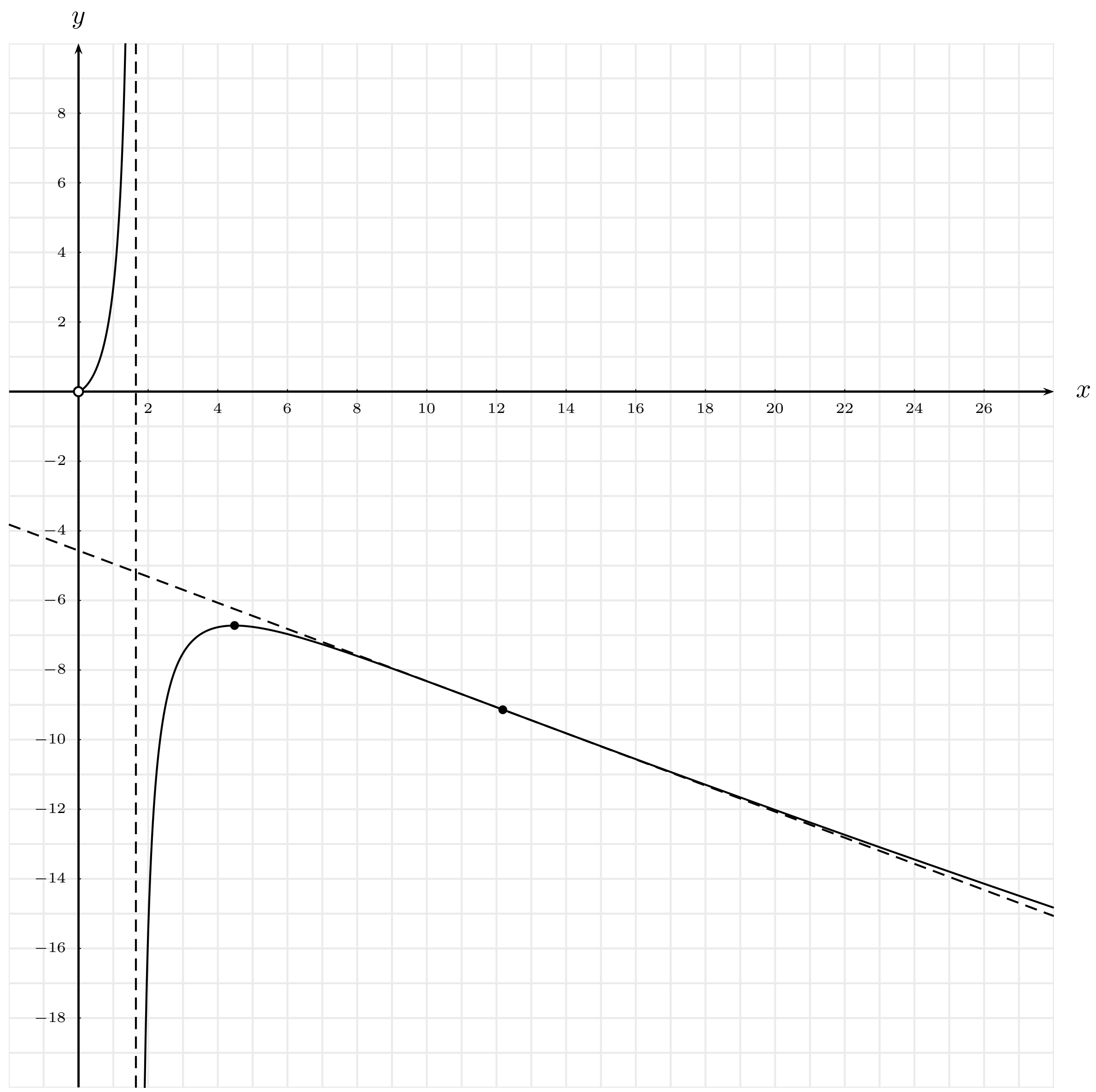
2. La tangente au point d'inflexion $x_0 = \sqrt{e}^5$ est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff y = -\frac{3}{4}e^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{8}(x - e^{\frac{5}{2}}) \iff y = -\frac{3}{8}x - \frac{3}{8}e^{\frac{5}{2}}$$

ou avec les valeurs directement calculée dans le tableau

$$y = -9.137 + (-0.375)(x - 12.182) \iff y \cong -0.375x - 4.569$$

3. Voici le graphe de la fonction et de la tangente au point d'inflexion.



Réponses de l'exercice 253

1. (a) On a $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction n'est donc ni paire, ni impaire.

   (b) Le bord de D est $\partial D = \{1, \pm\infty\}$.

   Comportement local : asymptote verticale en $x = 1$.
   En effet, on a :

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{(\frac{8}{0})}{=} \pm\infty$$

   Comportement en $\pm\infty$: asymptote oblique $y = x + 5$.
   En effet, on a :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1 \\ h &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x + 1} \right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 5 \end{aligned}$$

   (c) Calcul de la dérivée et de la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{3(x+1)^2 \cdot (x-1)^2 - (x+1)^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot \big(3(x-1) - 2(x+1)\big)}{(x-1)^3} = \frac{(x+1)^2\,(x-5)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{(x+1)^2\,(x-5)}{(x-1)^3} \right)' \\ &= \frac{\big(2(x+1)\cdot(x-5) + (x+1)^2\big)\cdot(x-1)^3 \;-\; (x+1)^2(x-5)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{(x+1)\Big(\big(2(x-5) + (x+1)\big)\cdot(x-1) \;-\; 3(x+1)(x-5)\Big)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x+1)\Big((3x-9)(x-1) \;-\; 3(x+1)(x-5)\Big)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x+1)\Big(3x^2 - 12x + 9 \;-\; 3(x^2 - 4x - 5)\Big)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{24(x+1)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

(d) En *visualisant* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \qquad f'(x) = \frac{(x+1)^2\,(x-5)}{(x-1)^3} \qquad f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

Toutes les valeurs sautent aux yeux.

Le tableau de comportement est :

x		-1		1		5	
$f(x)$	$-$	0	$+$	↯	$+$	13.5	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	↯	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	↯	$+$	$+$	$+$
comportement de f							

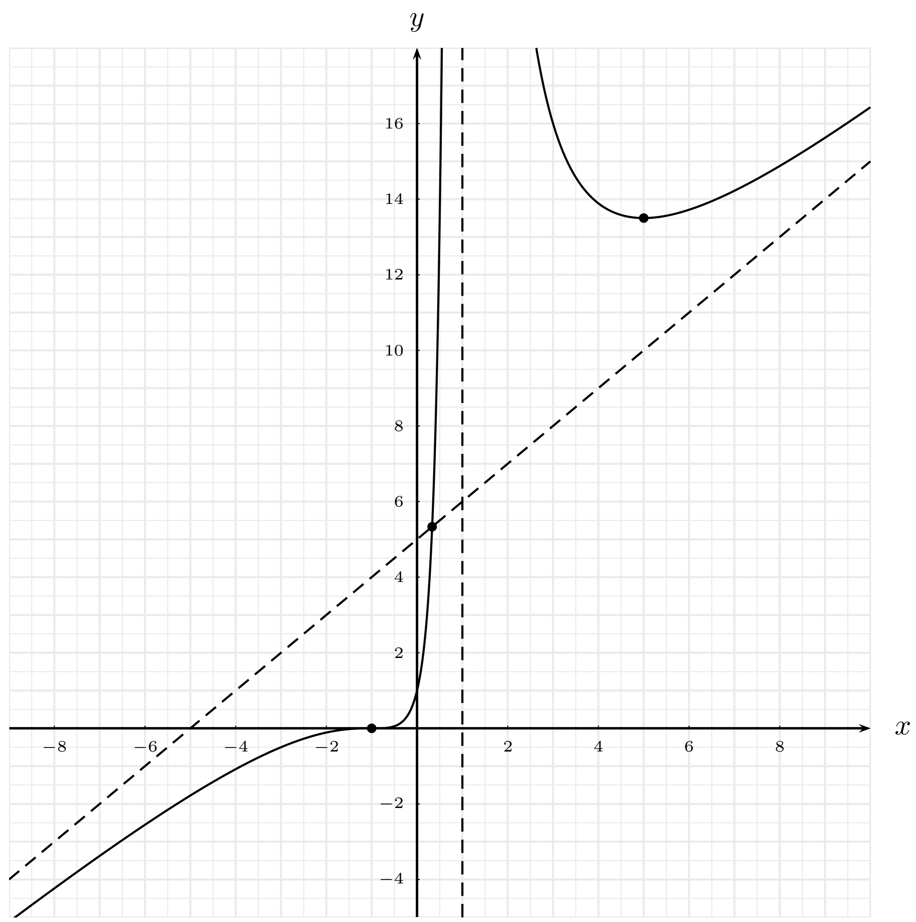
On a un zéro et un point d'inflexion $(-1;0)$, un minimum local en $\cong (5;13.5)$.

2. Pour trouver la première coordonnée, on résout l'équation $f(x) = x+5$.

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x+5 \iff (x+1)^3 = (x+5)(x^2-2x+1)$$
$$\iff x^3+3x^2+3x+1 = x^3+3x^2-9x+5 \iff 12x = 4 \iff x = \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}$$

Pour trouver la 2e coordonnée, on calcule $f(\frac{1}{3}) = \frac{16}{3}$. Le point d'intersection est $(\frac{1}{3};\frac{16}{3})$.

3. Voici le graphe de f :



Réponses de l'exercice 254

Il est utile de

- soit calculer les zéros. En utilisant la formule de Viète, on trouve

$$f(x) = 0 \iff x^2 + x - \tfrac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

- soit de factoriser $f(x)$. En utilisant la formule de Viète, on trouve

$$f(x) = \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)e^{-2x}$$

1. **Domaine de définition et parité**

   On a $Z = \left\{\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$.

   L'ensemble des zéros a un défaut de symétrie, la fonction f n'est ni paire, ni impaire.

2. On a $D = \mathbb{R}$. Le bord de D est $\partial D = \{\pm\infty\}$

   Comportement à l'infini

   (a) Comportement vers $-\infty$.

   On a
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 + x - \tfrac{1}{2}) \cdot e^{-2x} \overset{((+\infty)\cdot(+\infty))}{=} +\infty$$

   Il est donc possible qu'il y ait une asymptote oblique $y = mx + h$.

   $$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x^2 + x - \frac{1}{2}}{x}}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\to+\infty} = -\infty$$

   Il n'y a donc pas d'asymptote oblique à gauche.

   (b) Comportement vers $+\infty$.

   On a
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 + x - \tfrac{1}{2}) \cdot e^{-2x} \overset{(+\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - \frac{1}{2}}{e^{2x}}$$
   $$\underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{2e^{2x}} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4e^{2x}} \overset{(\frac{2}{+\infty})}{=} 0$$

   On a donc une asymptote horizontale à droite d'équation $y = 0$.

3. **Dérivées et tableau de comportement**

   La dérivée est $f'(x) = 2(1 - x^2)e^{-2x}$.

   À l'aide d'une identité remarquable, elle peut se factoriser en $2(1 - x)(1 + x)e^{-2x}$.

   La dérivée seconde est $f''(x) = 4(x^2 - x - 1)e^{-2x}$.

   À l'aide de Viète, elle peut se factoriser en $4\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)e^{-2x}$.

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = \left(x^2+x-\tfrac{1}{2}\right)\ e^{-2x} \qquad f'(x) = 2\ \left(1-x^2\right)\ e^{-2x} \qquad f''(x) = 4\ \left(x^2-x-1\right)\ e^{-2x}$$

On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$x^2+x-\tfrac{1}{2}=0 \iff \tfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \cong 0.366 \text{ ou } -1.366$$

$$1-x^2=0 \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$$

$$x^2-x-1=0 \iff \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \cong 1.618 \text{ ou } -0.618$$

On aurait pu aussi travailler avec les factorisations.

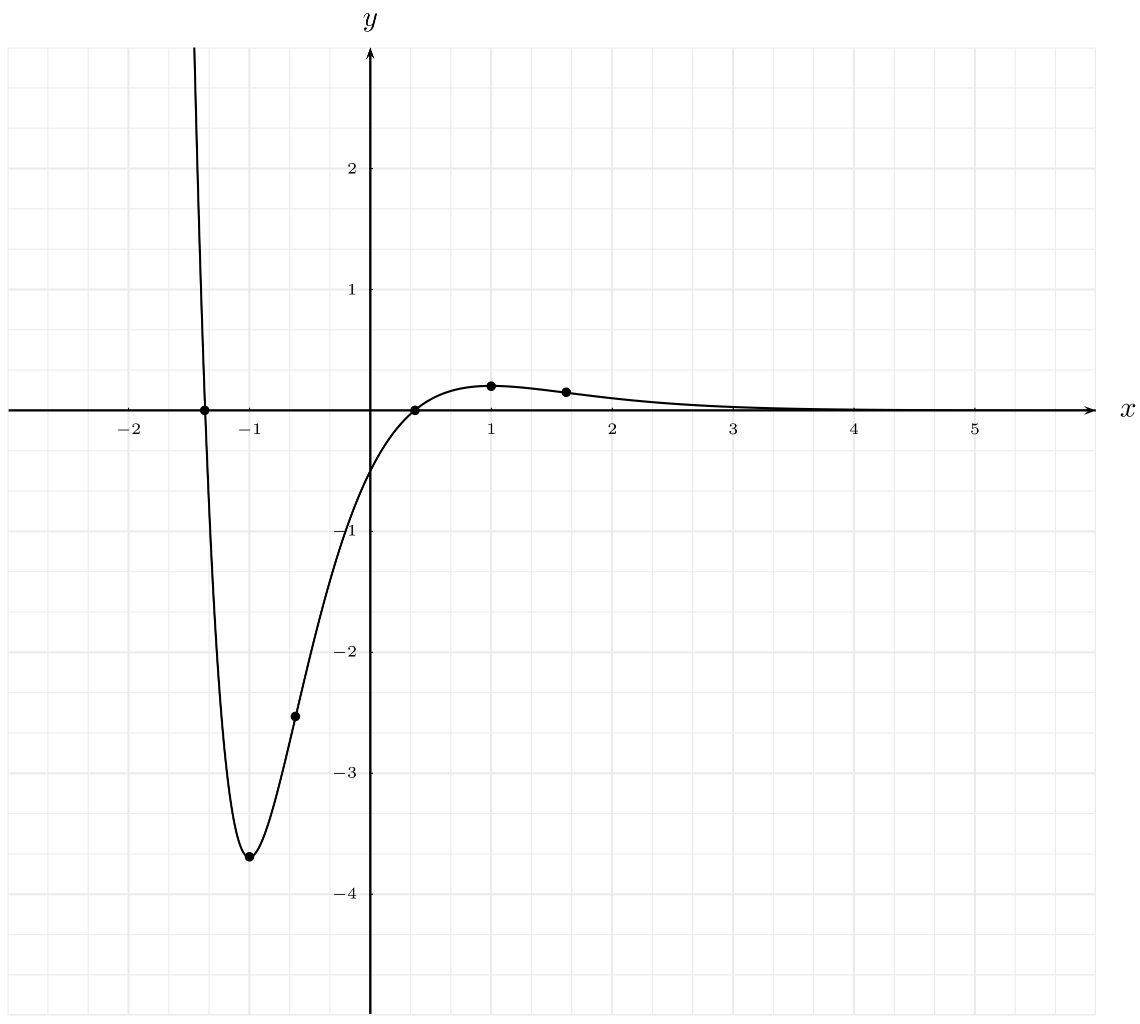
$$f(x) = \left(x+\tfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\ \left(x+\tfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\ e^{-2x} \qquad f'(x) = 2\ (1-x)\ (1+x)\ e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4\ \left(x-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ \left(x-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\ e^{-2x}$$

Le tableau de comportement est :

x		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	-3.69	$-$	-2.53	$-$	0	$+$	0.20	$+$	0.15	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
comport. de f													

4. **Graphe de f**



Réponses de l'exercice 255

1. **Domaine de définition et parité**

   On a $D =]0, +\infty[$. Ainsi D a un défaut de symétrie et f n'est donc ni paire, ni impaire.

2. Le bord de D est $\partial D = \{0, +\infty\}$.

   Comportement local
   On a
   $$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{((-\infty)\cdot(-\infty))}{=} +\infty$$
   On a donc une asymptote verticale en $x = 0$.

   Comportement à l'infini
   On a
   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) \overset{((+\infty)\cdot(+\infty))}{=} +\infty$$
   Il est ainsi possible qu'il y ait une AO d'équation $y = mx+h$. Regardons ce que donnent les formules.
   $$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x)-2)(\ln(x)+1)}{x} \\ &\overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}\cdot(\ln(x)+1) + (\ln(x)-2)\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)-1}{x} \\ &\overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} \overset{(\frac{2}{+\infty})}{=} 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, m étant nul, $h = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Il n'y a donc pas d'asymptote oblique.

3. **Dérivées et tableau de comportement**

   $$f'(x) = \Big((\ln(x)-2)(\ln(x)+1)\Big)' = \tfrac{1}{x}\cdot(\ln(x)+1) + (\ln(x)-2)\cdot\tfrac{1}{x} = \frac{2\ln(x)-1}{x}$$
   $$f''(x) = \left(\frac{2\ln(x)-1}{x}\right)' = \frac{\frac{2}{x}\cdot x - (2\ln(x)-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{3-2\ln(x)}{x^2}$$

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = \boxed{(\ln(x) - 2)}\ \boxed{(\ln(x) + 1)} \qquad f'(x) = \frac{\boxed{2\ln(x) - 1}}{x} \qquad f''(x) = \frac{\boxed{3 - 2\ln(x)}}{x^2}$$

Les facteurs entourés en rouge ne sont pas définis pour $x \leqslant 0$. Les éclairs en rouge correspondent à ces facteurs qui ne sont pas définis pour $x = 0$.

On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$\ln(x) - 2 = 0 \iff \ln(x) = 2 \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^2 \cong 7.39$$

$$\ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -1 \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{-1} \cong 0.37$$

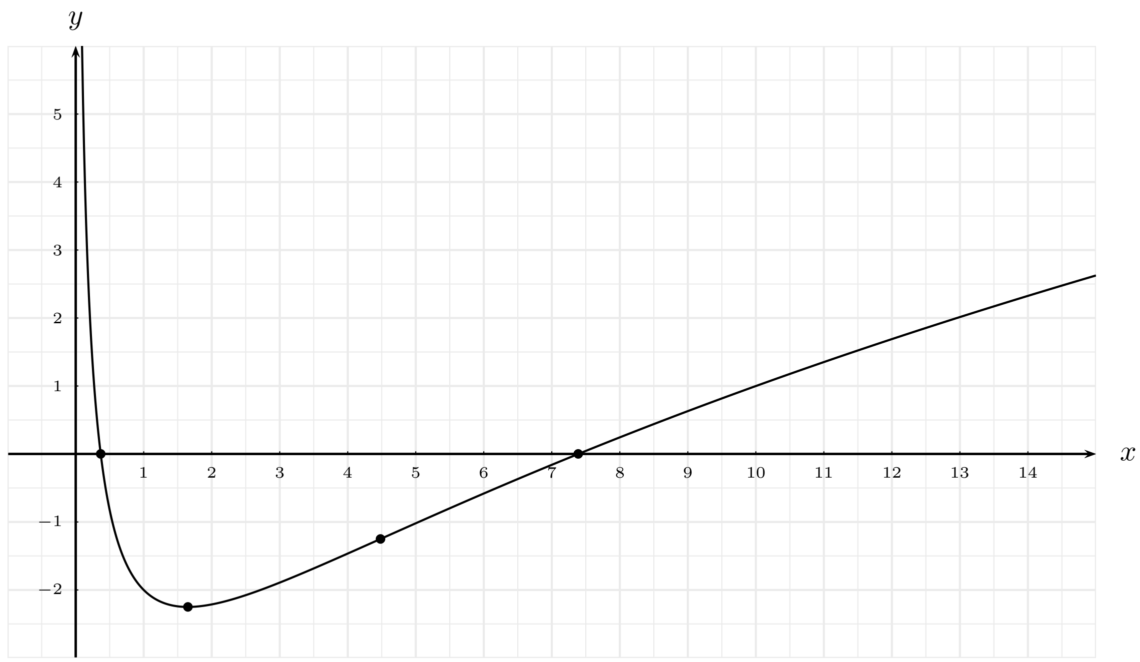
$$2\ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \tfrac{1}{2} \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{\frac{1}{2}} \cong 1.65$$

$$3 - 2\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = \tfrac{3}{2} \overset{\text{slogan}}{\iff} x = e^{\frac{3}{2}} \cong 4.48$$

Le tableau de comportement est :

x	0		0.37		1.65		4.48		7.39	
$f(x)$	$\lightning$	$+$	0	$-$	-2.25	$-$	-1.25	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\lightning$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
comp de f										

4. **Graphe de f**



Réponses de l'exercice 256

1. **Domaine de définition et parité**

   On a $Z = \{-\sqrt[3]{2}\}$.

   L'ensemble des zéros a un défaut de symétrie, la fonction f n'est ni paire, ni impaire.

2. On a $D = \mathbb{R}$. Le bord de D est $\partial D = \{\pm\infty\}$.

   Comportement à l'infini
   C'est une fonction rationnelle de degré 3 sur degré 2 : il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$.

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\
h &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2 \; - \; x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x}{x^2+1} = 0
\end{aligned}
$$

   On a donc une AO : $y = x$.

3. **Dérivées et tableau de comportement**

   La dérivée factorisée est $f'(x) = \dfrac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$.

   Les polynômes du deuxième degré ont un discriminant négatif, ils sont déjà factorisés. Ainsi, quelque soit la valeur de x, x^2+x+4 et x^2+1 sont des nombres positifs.

   En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$
f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1} \qquad f'(x) = \frac{x \;\; (x-1) \;\; (x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}
$$

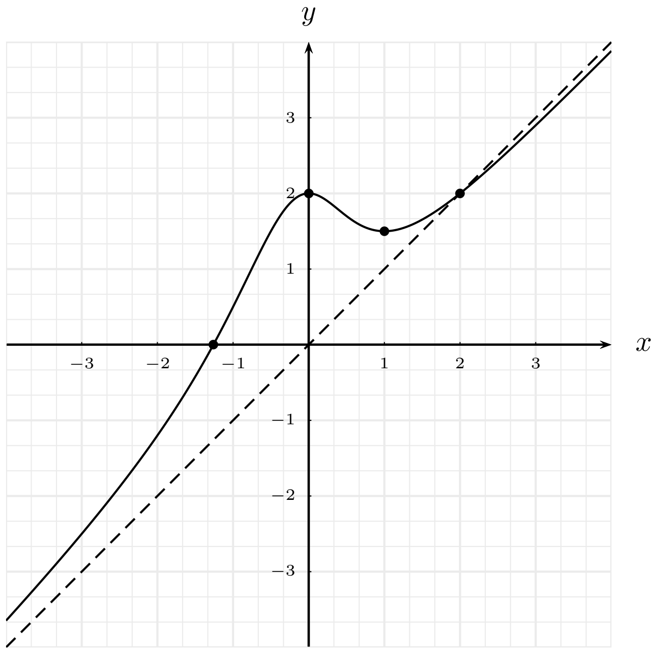
   On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$
x^3+2=0 \iff x^3=-2 \iff x = -\sqrt[3]{2} \cong -1.26
$$

   Le tableau de comportement est :

x		-1.26		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	2	$+$	1.5	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
comportement de f							

4. **Graphe de f**



Remarques

(a) Il est facile de montrer que l'asymptote oblique $y = x$ est coupée exactement une fois par la fonction f.

En effet, on calcule la première coordonnée d'un éventuel point d'intersection en posant

$$f(x) = x \iff \frac{x^3+2}{x^2+1} = x \iff x^3+2 = x(x^2+1) \iff x^3+2 = x^3+x \iff 2 = x$$

Ainsi, il y a exactement une intersection au point $(2, 2)$.

(b) Si on a l'impression que la fonction s'éloigne de son asymptote oblique à droite, c'est parce qu'il y a un point d'inflexion un peu plus loin.

On peut faire cette affirmation malgré le fait qu'on a pas tenu compte de la dérivée seconde !

En fait, la dérivée seconde est

$$f''(x) = \frac{-2(x^3 - 6x^2 - 3x + 2)}{(x^2+1)^3}$$

Or, pour trouver les zéros de ce polynôme de degré 3, il faut passer par les nombres complexes. On trouve des points d'inflexion en $x \cong -0.806$, $x \cong 0.387$, en $x \cong 6.419$.

Réponses de l'exercice 257

Il est utile pour la suite de factoriser $f(x)$. En utilisant la formule de Viète (c'est un polynôme du deuxième degré en e^x), on obtient

$$f(x) = (e^x + 1)(e^x - 5)$$

On aurait aussi pu deviner cette factorisation !

1. **Domaine de définition et parité**

   On a $Z = \{\ln(5)\}$ (lorsque $e^x = 5$).

   L'ensemble des zéros a un défaut de symétrie, la fonction f n'est ni paire, ni impaire.

2. On a $D = \mathbb{R}$. Le bord de D est $\partial D = \{\pm\infty\}$.

   Comportement à l'infini

   (a) Comportement vers $-\infty$.
   On a

   $$\lim_{x\to-\infty}(e^x + 1)(e^x - 5) \overset{((1)\cdot(-5))}{=} -5$$

   Ainsi, on a une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = -5$.

   (b) Comportement vers $+\infty$.
   On a

   $$\lim_{x\to+\infty}(e^x + 1)(e^x - 5) \overset{((+\infty)\cdot(+\infty))}{=} +\infty$$

   Il est possible qu'il y ait une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$.

   $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x + 1)(e^x - 5)}{x} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(e^x - 5) \ + \ (e^x + 1)e^x}{1} \overset{(\frac{\pm\infty}{1})}{=} +\infty$$

   Il n'y a donc pas d'asymptote oblique à droite.

3. **Dérivées et tableau de comportement**

   La dérivée factorisée est $f'(x) = 2(e^x - 2)e^x$.

   La dérivée seconde factorisée est $f''(x) = 4(e^x - 1)e^x$.

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = (e^x + 1)\ (e^x - 5) \qquad f'(x) = 2\ (e^x - 2)\ e^x \qquad f''(x) = 4\ (e^x - 1)\ e^x$$

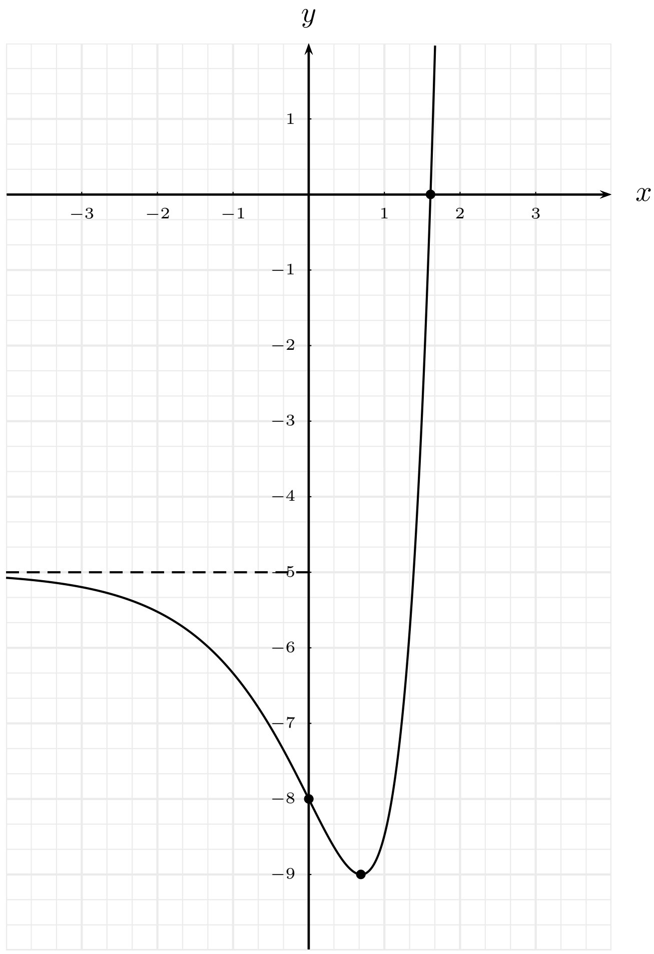
On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$e^x - 5 = 0 \iff e^x = 5 \iff x = \ln(5) \cong 1.61$$
$$e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2) \cong 0.69$$
$$e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = \ln(1) = 0$$

Le tableau de comportement est :

x		0		0.69		1.61	
$f(x)$	$-$	-8	$-$	-9	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
comportement de f							

4. **Graphe de f**



Réponses de l'exercice 258

Domaine de définition : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zéros : $Z = \big\{ \pm e^{-1} \big\}$.
Parité
La fonction est impaire, car $f(-x) = \dfrac{2 + \ln\big((-x)^2\big)}{-x} = -\dfrac{2 + \ln(x^2)}{x} = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Comportement au bord du domaine de définition
On a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ainsi $\partial D = \{0, \pm\infty\}$.

- **Comportement local**

  On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \overset{(\frac{-\infty}{0})}{=} \pm\infty \implies$ AV : $x = 0$.

- **Comportement à l'infini**

  On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2 + \ln(x^2)}{x} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})}{=}} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{2}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \implies$ AH : $y = 0$.

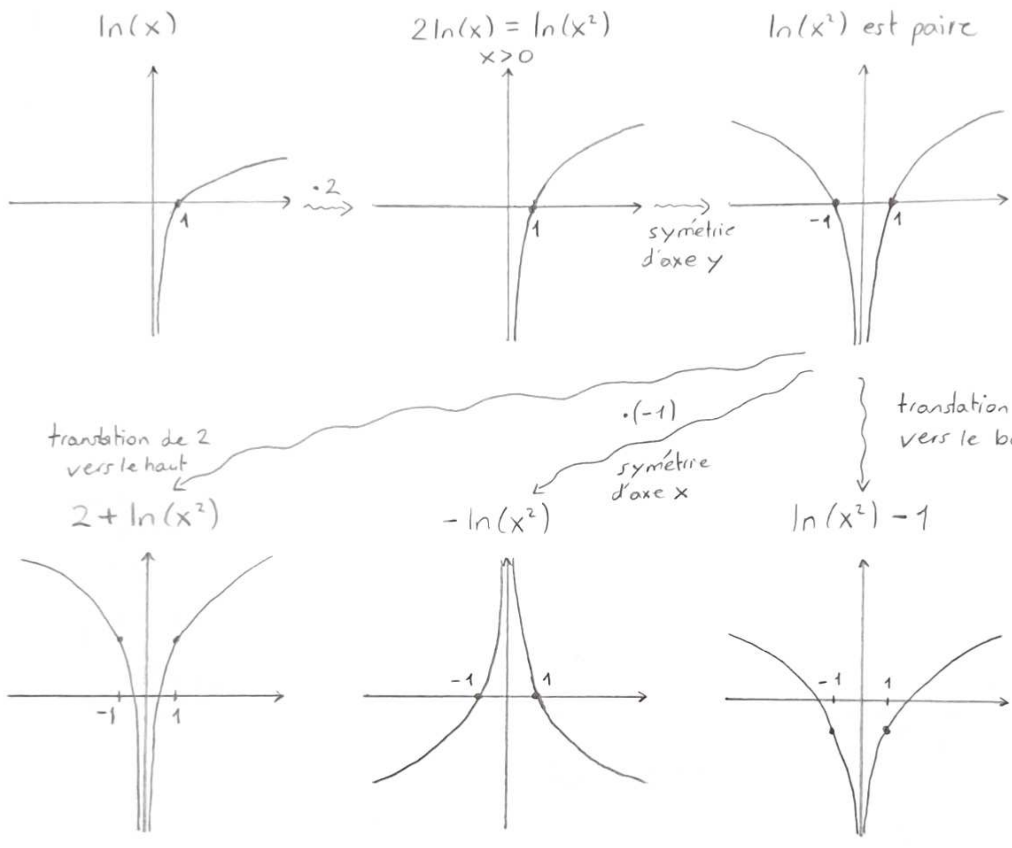
Dérivées et tableau de comportement
On a

$$f'(x) = \left(\frac{2 + \ln(x^2)}{x} \right)' = \frac{\left(\frac{2}{x}\right) \cdot x \; - \; \big(2 + \ln(x^2)\big) \cdot 1}{x^2} = \frac{-\ln(x^2)}{x^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-\ln(x^2)}{x^2} \right)' = \frac{\left(-\frac{2}{x}\right) \cdot x^2 \; - \; \big(-\ln(x^2)\big) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\big(\ln(x^2) - 1\big)}{x^3}$$

Ainsi, le tableau de signes est constitué des valeurs $\pm\sqrt{e} \cong \pm 1.65$, ± 1, $\pm\frac{1}{e} \cong \pm 0.37$ et 0.

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs



On peut déterminer ceux qui changent de signe , ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs .

$$f(x) = \frac{\boxed{2+\ln(x^2)}}{x} \qquad f'(x) = \frac{\boxed{-\ln(x^2)}}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2\ \boxed{(\ln(x^2)-1)}}{x^3}$$

Les facteurs entourés en rouge ne sont pas définis pour $x = 0$. Les éclairs en rouge correspondent à ces facteurs qui ne sont pas définis pour $x = 0$.

On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$2+\ln(x^2) = 0 \iff \ln(x^2) = -2 \overset{\text{slogan}}{\iff} x^2 = e^{-2} \iff x = \pm e^{-1} \cong \pm 0.37$$

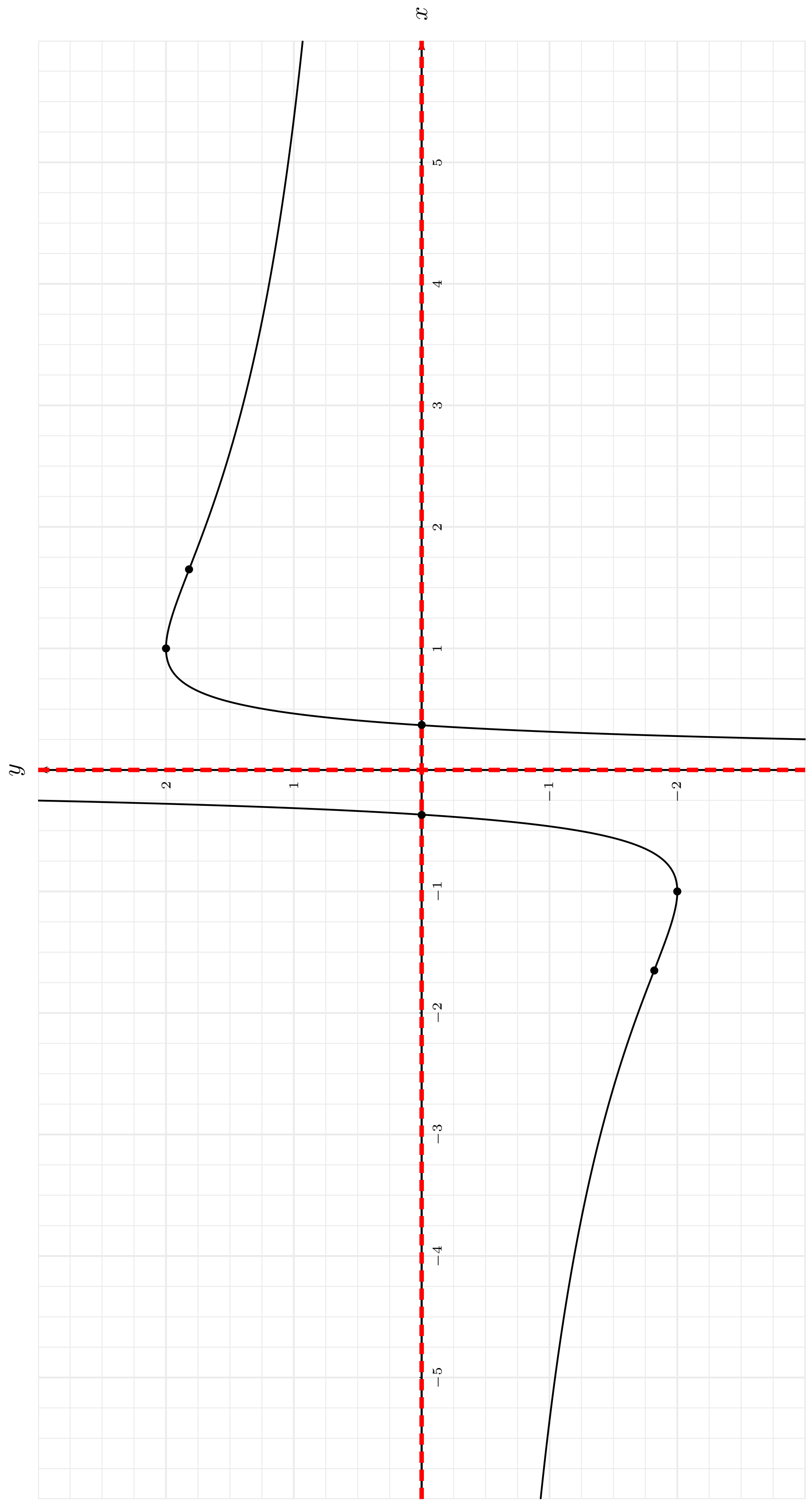
$$-\ln(x^2) = 0 \iff \ln(x^2) = 0 \overset{\text{slogan}}{\iff} x^2 = e^0 = 1 \iff x = \pm 1$$

$$\ln(x^2) - 1 = 0 \iff \ln(x^2) = 1 \overset{\text{slogan}}{\iff} x^2 = e^1 = e \iff x = \pm e^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{e} \cong \pm 1.65$$

Le tableau de comportement est :

x		-1.65		-1		-0.37		0		0.37		1		1.65	
$f(x)$	$-$	-1.82	$-$	-2	$-$	0	$+$	⚡	$-$	0	$+$	2	$+$	1.82	$+$
$f'(x)$	$-$	-0.37	$-$	0	$+$	14.8	$+$	⚡	$+$	14.8	$+$	0	$-$	-0.37	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	⚡	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
comp. de f															

Graphe de la fonction



Réponses de l'exercice 259

Recherche du domaine de définition.
Il faut trouver les zéros du dénominateur. On va donc factoriser le dénominateur. Rappelons que ± 1 est toujours dans la liste donnée par le lemme de Gauss. Ici on voit que 1 est un zéro. On peut donc factoriser par $(x-1)$. Par Horner, on trouve

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x-1)(x^2 - 6x + 5)$$

Par Viète (ou juste en devinant), on a finalement

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x-1)^2(x-5)$$

Ainsi $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$.

Parité
Le domaine D a un défaut de symétrie. La fonction n'est donc ni paire, ni impaire.

Comportement au bord de D

- **Comportement local en $x = 1$**
  On a
  $$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{(\frac{\neq 0}{0})}{=} \pm\infty$$
  Il y a donc une AV d'équation $x = 1$.
- **Comportement local en $x = 5$**
  On a
  $$\lim_{x\to 5} f(x) \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(5x^2+6x-27)}{(x-5)(x-1)^2} = \lim_{x\to 5} \frac{5x^2+6x-27}{(x-1)^2} \overset{(\frac{128}{16})}{=} 8$$
  Il y a donc un trou en $(5; 8)$. De plus, on a montré que, pour $x \neq 5$, on a
  $$\boxed{f(x) = \frac{5x^2+6x-27}{(x-1)^2} \overset{\text{Viète}}{=} \frac{(5x-9)(x+3)}{(x-1)^2}}$$
  Dans l'exercice 250, on est déjà arrivé à cette situation où la fonction se simplifie et on s'était rendu compte qu'il était plus simple, qu'à partir de ce moment, on utilise cette expression fonctionnelle simplifiée (en se souvenant que ni f, ni f', ni f'' ne sont définies en 5) !
- **Comportement à l'infini**
  La fonction est de degré 2 sur degré 2, ainsi on voit une AH d'équation $y = 5$.

Tableau de signes, de croissance et de courbure
On a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(10x+6)\cdot(x-1)^2 \quad - \quad (5x^2+6x-27)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(10x+6)\cdot(x-1) \quad - \quad 2(5x^2+6x-27)}{(x-1)^3} = \frac{-16x+48}{(x-1)^3} = \frac{16(3-x)}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-16\cdot(x-1)^3 \quad + \quad 16(x-3)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\
&= \frac{-16\big((x-1) \quad - \quad 3(x-3)\big)}{(x-1)^4} = \frac{-16(-2x+8)}{(x-1)^4} = \frac{32(x-4)}{(x-1)^4}
\end{aligned}$$

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

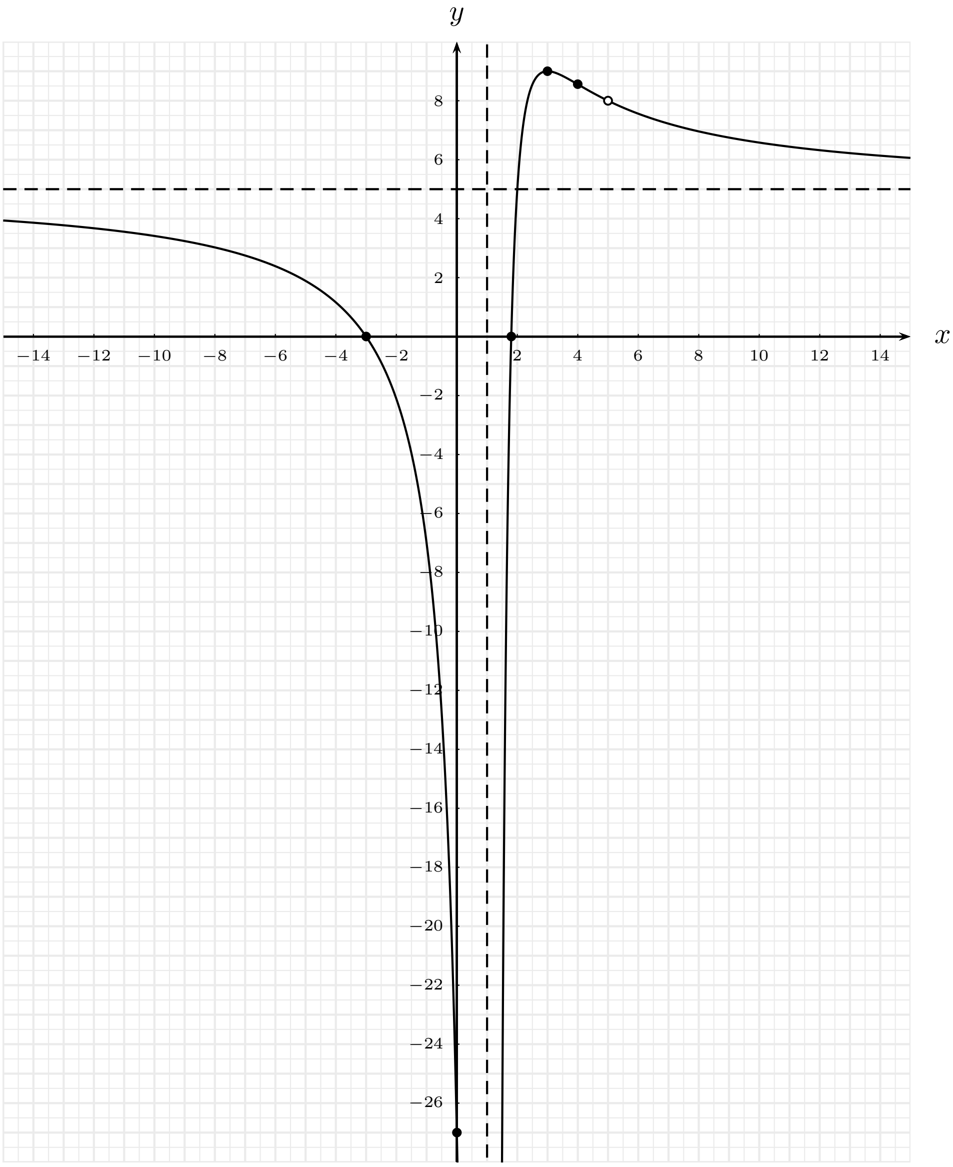
$$f(x) = \frac{(5x-9)\ (x+3)}{(x-1)^2} \qquad f'(x) = \frac{16\ (3-x)}{(x-1)^3} \qquad f''(x) = \frac{32\ (x-4)}{(x-1)^4}$$

Toutes les valeurs du tableau sautent au yeux ($5x-9$ s'annule en $\frac{9}{5} = 1.8$).

On se souvient aussi que la fonction a été simplifiée grâce à une limite de type $\left(\frac{0}{0}\right)$ en $x = 5$, et que donc ni f, ni f', ni f'' ne sont définie en $x = 5$. On pourrait mettre des $\lightning$, mais les valeurs d'évaluation donnent la hauteur des trous. Si on n'avait pas simplifié la fonction, on aurait du calculer des limites pour x allant vers 5 pour f' et f''.

Le tableau de comportement est :

x		-3		1		1.8		3		4		5	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$	9	$+$	8.56	$+$	(8)	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$(-)$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$(+)$	$+$
comp. de f													



2.19 Analyse : problèmes de taux d'accroissement

Résolution de l'exercice 260

1. Les corrections se trouvent sur Youtube.

   `https://www.youtube.com/watch?v=n6swOIzZDU8`

   La réponse est 12 cm^3/min.

2. Les corrections se trouvent sur Youtube.

   `https://www.youtube.com/watch?v=eoMVM5__d8o`

   La réponse est $\dfrac{1}{16\pi}$ cm/min.

3. La réponse est $\dfrac{3}{20\pi}$ cm/min.

Résolution de l'exercice 261

1. La réponse est 240π m^2/s.
2. La réponse est $-\dfrac{8}{3}$ m/s.

Résolution de l'exercice 262

La réponse est 0.1056 radians/s ou 6.05 °/s.

2.20 Analyse : dérivées implicites

Résolution de l'exercice 263

1. **Il y a plusieurs méthodes :**

   Méthode classique
   Si $x^2 + y^2 = 25$, alors $y^2(x) = 25 - x^2$. Puisque pour le point $(3; 4)$, $y > 0$, on a

   $$y(x) = \sqrt{25 - x^2} \implies y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

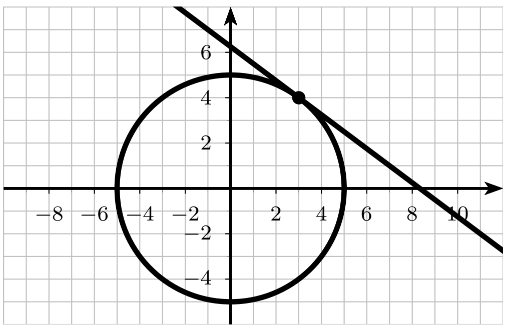
   Et donc, ici $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{4}$.

   Méthode avec la dérivée implicite
   On dérive par rapport à x chaque membre de l'équation $x^2 + y^2 = 25$ (en d'autres termes, on applique l'opérateur $\frac{d}{dx}$ à chaque membre de l'équation).

   $$x^2 + y^2 = 25 \implies 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \implies 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

   Et donc, ici $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{4}$.

   Schéma

   La dérivée $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{4}$ est la pente de la tangente au cercle de rayon 5, centré à l'origine.

2. **Méthode géométrique**
   En reliant l'origine au point $(3; 4)$ sur le cercle de rayon 5 centré à l'origine (faites un schéma), on voit que le vecteur normal de la tangente est $\vec{n} = \binom{3}{4}$.

   Ainsi, le vecteur directeur de la tangente est

   $$\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

   Ainsi la pente de la tangente est $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{4}$.

Résolution de l'exercice 264

1. Pour l'intersection avec l'axe des x, on pose $y = 0$ dans la relation implicite.

   On trouve ainsi les points $O(0;0)$, $A(\sqrt{2};0)$ et $B(-\sqrt{2};0)$.

   Pour l'intersection avec l'axe des y, on pose $x = 0$ dans la relation implicite.

   On trouve ainsi le point $O(0;0)$.

2. Pour les points à tangente horizontale, on dérive par rapport à x et on pose $\frac{dy}{dx} = 0$.

   On trouve ainsi l'équation $x(x^2 + y^2 - 1) = 0$, qui nous dit que $x = 0$ ou que $y^2 = 1 - x^2$ (on résout le système contenant cette équation et l'équation implicite de l'exercice).

   Les points à tangente horizontale sont $O(0;0)$ et les quatre points $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{2})$.

   Pour les points à tangente verticale, on dérive par rapport à y et on pose $\frac{dx}{dy} = 0$.

   On trouve ainsi l'équation $y(x^2+y^2+1) = 0$, qui nous dit que $y = 0$ uniquement (puisque le nombre $x^2 + y^2$ étant positif ou nul, il ne peut pas être égal à -1).

   Le point à tangente verticale est donc $O(0;0)$.

   Soucis : on a trouvé un point à la fois à tangente horizontale et verticale, c'est impossible. La raison est qu'on a la relation $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$, et que cela ne fonctionne pas si les deux dérivées sont simultanément nulles. Il faut donc enquêter pour comprendre ce qu'il se passe à l'origine, c'est le but des deux items suivants.

3. Grâce à la formule de Viète, on peut isoler y de la relation implicite.

   On trouve $y = \pm\sqrt{\sqrt{1+4x^2} - 1 - x^2}$. On a deux fonctions en x qui représentent la courbe de l'exercice.

   Pour la fonction avec $+$, on peut montrer que $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{dy}{dx} = 1$ et que $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{dy}{dx} = -1$.

   On a les limites opposées pour la fonction avec $-$.

   Cela prouve que la fonction avec $+$ se comporte à l'origine comme la valeur absolue. La fonction avec $-$ se comporte comme l'opposé de la valeur absolue. D'où les tangentes annoncées.

4. Grâce à la formule de Viète, on peut isoler x de la relation implicite.

   On trouve $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{1-4y^2} + 1 - y^2}$. On a quatre fonctions en y qui représentent la courbe de l'exercice. Seuls les fonctions $\pm\sqrt{-\sqrt{1-4y^2} + 1 - y^2}$ concernent l'origine.

   On trouve les mêmes résultats qu'au point précédent.

5. On utilise la symétrie d'axe $y = x$, la propriété de produit, et GeoGebra.

6. On utilise GeoGebra (si cette courbe n'a pas été donnée en exercice, c'est parce que les points à tangente horizontale et verticale nécessitent de résoudre des équations polynomiales de degré supérieure à 3 dont les solutions sont irrationneles).

2.21 Analyse : quelques calculs de limites particuliers

Résolution de l'exercice 265

On calcule ces limites avec la règle de l'Hospital

Afin de bien voir que la règle de l'Hospital ne fonctionne pas, appliquons la règle sans faire attention aux hypothèses (ce qu'il ne faut jamais faire !).

a) On a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos(x)}{1} \text{ n'existe pas}$$

La limite n'existe pas car $\cos(x)$ ne cesse pas d'osciller entre -1 et 1 sans se stabiliser vers aucune valeur !

b) On a
$$\lim_{x\to 2}\frac{3x}{x^2+1} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{6}{5})}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{3}{2x} \overset{(\frac{3}{4})}{=} \frac{3}{4}$$

Si on appliquait encore une fois l'Hospital, le type de limite serait $(\frac{0}{2})$ et donc on obtiendrait 0.

c) On a
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{-1\leqslant.\leqslant 1}{\pm\infty})}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\cos(\tfrac{1}{x}) \text{ n'existe pas}$$

La limite finale n'existe pas pour les mêmes raisons qu'aux points a) et b).

On calcule ces limites sans la règle de l'Hospital

On va citer avant ce calcul pourquoi on ne peut pas appliquer la règle de l'Hospital.

a) La règle de l'Hospital ne s'applique pas, car la limite obtenue par l'Hospital n'existe pas !
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$$

Cette limite vaut 1 car quand $x\to+\infty$, $\sin(x)$ reste entre -1 et 1, et donc $\frac{\sin(x)}{x}\to 0$.
Moralité : l'hypothèse que la limite obtenue par Hospital doit exister est fondamentale, car la limite calculée sans Hospital existe (elle vaut 1).

b) La règle de l'Hospital ne s'applique pas, car le type de la limite n'est ni $(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})$, ni $(\frac{0}{0})$!
$$\lim_{x\to 2}\frac{3x}{x^2+1} \overset{(\frac{6}{5})}{=} \frac{6}{5}$$

Moralité : l'hypothèse que la limite obtenue par Hospital doit être de type $(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})$ ou $(\frac{0}{0})$ est fondamentale, car la limite calculée sans Hospital n'est pas égale aux limites trouvées en utilisant l'Hospital.

c) La règle de l'Hospital ne s'applique pas, car le type de la limite n'est ni $(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})$, ni $(\frac{0}{0})$, et, en plus la limite trouvée par l'Hospital n'existe pas !
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{-1\leqslant.\leqslant 1}{\pm\infty})}{=} 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} x\cdot\sin(\tfrac{1}{x}) = 0$$

Rappelons que le facteur $\sin(\frac{1}{x})$ oscille entre -1 et 1.

Résolution de l'exercice 266

1. Toutes les hypothèses pour appliquer l'Hospital sont satisfaites (bon type de limite, la limite obtenue existe).

   Le problème est chronologique : pour appliquer l'Hospital on doit savoir dériver la fonction sinus, et pour pouvoir établir le fait que la dérivée de sinus est cosinus, on a besoin de connaître cette limite (qui ne peut donc pas être établie pas Hospital) !

2. (a) Si on y va directement avec la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

   On voit que le terme dont on calcule la limite se complique, ce n'est donc pas une bonne idée de faire ainsi.

   On va donc retourner la fraction.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{-\infty}{+\infty})}{=}} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{e^{-\frac{1}{x}}} \overset{(\frac{-1}{+\infty})}{=} 0$$

   (b) L'idée est d'utiliser la fonction exponentielle (et sa continuité).

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x-3} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x-3}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to \pm\infty} (2x-3)\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}$$

   Il ne reste plus qu'à calculer la limite à l'exposant.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (2x-3)\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}{\frac{1}{2x-3}} \underset{\text{Hosp.}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}}{-\frac{2}{(2x-3)^2}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{-1}{(x-1)(x-2)}}{-\frac{2}{(2x-3)^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2x-3)^2}{2(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2+\cdots}{2x^2+\cdots} = 2$$

   Donc la limite vaut e^2.

Résolution de l'exercice 267

a) On a

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}\,-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}\,-1)(\sqrt{x}\,+1)}{(x-1)(\sqrt{x}\,+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}\,+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}\,+1}=\frac{1}{2}$$

b) On a

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x}\,-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x\,-2}{(x-1)\big(\sqrt{x^2+x}\,+\sqrt{2}\,\big)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\big(\sqrt{x^2+x}\,+\sqrt{2}\,\big)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x}\,+\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) On a

$$\lim_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{2x-1}\,-3}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\big(\sqrt{2x-1}\,+3\big)}{2x-1\,-9}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\big(\sqrt{2x-1}\,+3\big)}{2x-10}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}\,+3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

d) On a

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\,-1}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\big(\sqrt{x^2+1}\,+1\big)}{x^2+1\,-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}\,+1}{1}=2$$

Résolution de l'exercice 268

a) Procédons comme à l'exercice précédent.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right) \overset{\left((+\infty)-(+\infty)\right)}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x+1\;-\;(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

Pour se débarrasser du facteur x au numérateur, il faut factoriser par x au dénominateur.

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

Rappelons que $\sqrt{x^2}=x$ si $x>0$.

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, il y a une asymptote horizontale à droite d'équation $y=\frac{1}{2}$.

Lorsque $x\to-\infty$, on procède de la même manière, mais $\sqrt{x^2}=-x$ lorsque $x<0$, ainsi la limite donnera $-\frac{1}{2}$ et on a une asymptote horizontale à gauche d'équation $y=-\frac{1}{2}$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 269
Selon la théorie, il faut montrer que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+c}\ -\left|x+\frac{b}{2}\right|\right)=0$$

On peut le faire en séparant les cas $x\to+\infty$ et $x\to-\infty$.

On peut aussi se dire que $\left|x+\frac{b}{2}\right|$ est une droite pour x suffisamment négatif (c'est la droite $y=-x-\frac{b}{2}$), et aussi pour x suffisamment positif (c'est la droite $y=x+\frac{b}{2}$). Ainsi, on cherche simplement à montrer que l'on retrouve ces asymptotes obliques en cherchant m et h pour la fonction $\sqrt{x^2+bx+c}$.

Lorsque $x\to+\infty$, on trouve

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+bx+c}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=1\\
h &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+c}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+bx+c\ -\ x^2}{\sqrt{x^2+bx+c}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{bx+c}{\sqrt{x^2+bx+c}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(b+\frac{c}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b+\frac{c}{x}}{\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+1}=\frac{b}{2}
\end{aligned}$$

On a donc une AO à droite d'équation $y=x+\frac{b}{2}$.

Lorsque $x\to-\infty$, on trouve

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+bx+c}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}=-1\\
h &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+c}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+bx+c\ -\ x^2}{\sqrt{x^2+bx+c}-x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{bx+c}{\sqrt{x^2+bx+c}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(b+\frac{c}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{b+\frac{c}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+1\right)}=-\frac{b}{2}
\end{aligned}$$

On a donc une AO à droite d'équation $y=-x-\frac{b}{2}$.

Corrections de l'exercice 270

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2\cdot\frac{\sin(2x-2)}{2x-2}=2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3}{\cos(3x)}=3$

Corrections de l'exercice 271

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = \pm\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} =$ «mutatis mutandis» $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \dfrac{-1}{\cos(x)+1} = -\dfrac{1}{2}$

Corrections de l'exercice 272

a) On pose $m = -n$:

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m-1+1}{m-1}\right)^{m} = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1+1} = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\cdot\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e\cdot(1+0) = e$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}} = \sqrt{e}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x-3} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-2+1}{x-2}\right)^{2x-3} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{2(x-2)+1}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{x-2}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{x-2}\right) = e^2\cdot(1+0) = e^2$$

2.22 Géométrie 3D : points, droites et plans

Résolution de l'exercice 273

Fait en classe.

Résolution de l'exercice 274

Fait en classe.

Résolution de l'exercice 275

Fait en classe.

Résolution de l'exercice 276

Fait en classe.

2.23 Géométrie 3D : droites et plans remarquables

♡ Exercice 277 : géométrie 3D - droite, plan et sphère (5 minutes)

Soit $A(2;3;1)$, $B(4;5;7)$, $C(5;4;8)$, $D(4;3;-1)$ quatre points.
Le plan (ABC) est d'équation cartésienne $2x + y - z = 6$.

Donner une représentation (cartésienne si possible) du plan médiateur du segment $[AB]$ et de la médiatrice dans le triangle ABC du segment $[AB]$.

Point du plan médiateur : $M(3;4;4)$ le milieu du segment $[AB]$.

Vecteur normal du plan médiateur : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

Plan médiateur : $x + y + 3z = 19$.

Vecteurs normaux de la médiatrice : $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ le vecteur normal de (ABC).
Vecteur directeur de la médiatrice : produit vectoriel des vecteurs normaux

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\7\\-1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}$$

Représentation paramétrique de la médiatrice qui passe aussi par M :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3 &+& 4\lambda \\ y &=& 4 &-& 7\lambda \\ z &=& 4 &+& \lambda \end{array}\right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

♡ Exercice 278 : géométrie 3D - droite, plan et sphère (5 minutes)

Soit $A(3;-2;5)$, $B(6;-4;15)$, $C(5;-3;12)$, $D(4;1;-3)$ quatre points.
Le plan (ABC) est d'équation cartésienne $4x + y - z = 5$.

Donner une représentation (cartésienne si possible) de la hauteur du tétraèdre $ABCD$ passant par D et de la hauteur du triangle ABC passant par A.

Point de la hauteur du tétraèdre issue de D : $D(4;1;-3)$.

Vecteur directeur de cette hauteur : $\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ le vecteur normal du plan (ABC).

Représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 4 &+& 4\lambda \\ y &=& 1 &+& \lambda \\ z &=& -3 &-& \lambda \end{array}\right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vecteur directeur de la hauteur au triangle issue de $A(3;-2;5)$:
C'est le produit vectoriel des vecteurs normaux $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{n}$.

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\13\\5\end{pmatrix}.$$

Représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3 &-& 2\lambda \\ y &=& -2 &+& 13\lambda \\ z &=& 5 &+& 5\lambda \end{array}\right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

♡ Exercice 279 : géométrie 3D - droite, plan et sphère (5 minutes)

Soit $A(2;-1;4)$, $B(8;-3;9)$, $C(11;-4;9)$, $D(10;-3;8)$ quatre points.
Le plan (ACD) est d'équation cartésienne $-x + 2y + 3z = 8$.

Donner une représentation (cartésienne si possible) du plan médian du tétraèdre $ABCD$ contenant le segment $[BC]$ et de la médiane du triangle ACD passant par C.

Point du plan médian et de la médiane : $M(6;-2;6)$ le milieu du segment $[AD]$.

Vecteur normal du plan médian :
C'est le produit vectoriel des deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Équation cartésienne du plan médian : $3x + 9y + z = 6$.

Vecteur directeur de la médiane : $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Représentation paramétrique de la médiane : $\begin{cases} x = 6 + 5\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 6 + 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

♡ Exercice 280 : géométrie 3D - droite, plan et sphère (5 minutes)

Soit $A(4;-2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;0;8)$, $D(3;0;4)$ quatre points.
Le plan (BCD) est d'équation cartésienne $x - y = 3$.

Donner une représentation (cartésienne si possible) de la bissectrice intérieure au triangle BCD passant par B et du plan bissecteur intérieur au triangle BCD passant par B.

Point de la bissectrice et du plan bissecteur : $B(2;-1;3)$.

On a $\|\overrightarrow{BC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ et $\|\overrightarrow{BD}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}$.

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{BC}$ est 3 fois plus long que $\overrightarrow{BD}$.
Vecteur directeur de la bissectrice : $3\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{d}$

Représentation paramétrique de la bissectrice : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Vecteur normal du plan bissecteur :
C'est le produit vectoriel des deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$

$$\vec{d} \wedge \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal du plan (BCD)

Équation cartésienne du plan bissecteur : $x + y - z = -2$.

♡ Exercice 281 : géométrie 3D - droite, plan et sphère (5 minutes)

Soit $A(6;-6;8)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;1;4)$, $D(-4;6;6)$ quatre points.
Le plan (ACD) est d'équation cartésienne $17x + 21y + 41z = 304$.

Donner une représentation (cartésienne si possible) du plan bissecteur intérieur au tétraèdre $ABCD$ passant par $[AB]$.

Points du plan bissecteur : $A(6;-6;8)$ et $B(3;-1;7)$.

On a $$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\7\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\-13\\-26\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \vec{n}_{ABC}.$$

Vecteur normal de la face (ABC) : $\vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{6}$

On a $$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-10\\12\\-2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-5\\6\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} = \vec{n}_{ABD}.$$

Vecteur normal de la face (ABD) : $\vec{n}_{ABD} = \begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Le sens des vecteurs normaux aux faces est important !

$\Longrightarrow$ $\vec{n}_{ABD}$ est 3 fois plus long que $\vec{n}_{ABC}$.

Vecteur normal du plan bissecteur intérieur : $\vec{n} = 3\vec{n}_{ABC} + \vec{n}_{ABD} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Équation cartésienne du plan bissecteur : $2x + y - z = -2$.

Vérifiez que les deux points sont sur ce plan !

♡ Exercice 282 : géométrie 3D - droite, plan et sphère (5 minutes)

Soit $A(1;-2;5)$ et $B(-2;10;2)$ et la sphère $\mathcal{S}$ centrée en $C(-3;2;-2)$ et de rayon $r = 9$.

Montrer que les points A et B sont sur la sphère, **puis** donner une représentation (cartésienne si possible) du plan tangent à la sphère passant par A et de la droite tangente à la sphère passant par A et orthogonale à l'arc de cercle $[AB]$.

On calcule la norme des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ pour déterminer si A et $B \in \mathcal{S}$.

$$d(A,C) = \|\overrightarrow{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{81} = r \text{ et } d(B,C) = \|\overrightarrow{CB}\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{81} = r.$$

Les points A et B sont bien sur la sphère.

Point du plan tangent : $A(1;-2;5)$. *Vecteur normal du plan tangent* : $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix}$.

Équation cartésienne : $4x - 4y + 7z = 47$.

Vecteur directeur de la tangente :
C'est le produit vectoriel des deux vecteurs normaux $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-3\\12\\-3\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-72\\-9\\36\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}$$

Représentation paramétrique de la tangente : $$\begin{cases} x = 1 + 8\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 5 - 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.24 Géométrie 3D : intersections et projections orthogonales

♡ **Exercice 283 : calcul d'intersection** (3 fois 5 minutes)

1. Expliquer pourquoi les droites ci-dessous sont sécantes ou gauches, puis calculer le point d'intersection si elles sont sécantes.

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & + & 2\lambda \\ y & = & -16 & - & 3\lambda \\ z & = & 6 & + & \lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3\mu \\ y & = & -21 & + & 7\mu \\ z & = & 13 & - & 5\mu \end{array} \right. , \ \mu \in \mathbb{R}$$

Elles sont sécantes ou gauches, car leurs vecteurs directeurs ne sont pas parallèles.
Notons $I(x;y;z)$ le point d'intersection. Comme $I \in d_1$ et $I \in d_2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & + & 2\lambda \\ y & = & -16 & - & 3\lambda \\ z & = & 6 & + & \lambda \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3\mu \\ y & = & -21 & + & 7\mu \\ z & = & 13 & - & 5\mu \end{array} \right.$$

On résout le système de manière à trouver une inconnue (pas besoin des deux).
Il y a différentes manières de résoudre un tel système, en voici une qui consiste à commencer par résoudre les deux premières équations.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\lambda & - & 3\mu & = & -12 \\ -3\lambda & - & 7\mu & = & -5 \end{array} \right. \overset{2②+3①}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\lambda & - & 3\mu & = & -12 \\ & - & 23\mu & = & -46 \end{array} \right.$$

On a trouvé $\mu = 2 \implies$ le point d'intersection pourrait donc être $I(4;-7;3)$.
En mettant I dans d_1, on trouve $\lambda = -3$ pour les deux premières coordonnées.
C'est aussi vrai pour la 3e coordonnée, donc d_1 et d_2 sont sécantes en $I(4;-7;3)$.

2. Expliquer pourquoi les droites ci-dessous sont sécantes ou gauches, puis calculer le point d'intersection si elles sont sécantes.

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & + & 2\lambda \\ y & = & -16 & - & 3\lambda \\ z & = & 2 & + & \lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3\mu \\ y & = & -21 & + & 7\mu \\ z & = & 13 & - & 5\mu \end{array} \right. , \ \mu \in \mathbb{R}$$

Elles sont sécantes ou gauches, car leurs vecteurs directeurs ne sont pas parallèles.
Notons $I(x;y;z)$ le point d'intersection. Comme $I \in d_1$ et $I \in d_2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 10 & + & 2\lambda \\ y & = & -16 & - & 3\lambda \\ z & = & 2 & + & \lambda \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3\mu \\ y & = & -21 & + & 7\mu \\ z & = & 13 & - & 5\mu \end{array} \right.$$

On résout le système de manière à trouver une inconnue (pas besoin des deux).
Il y a différentes manières de résoudre un tel système, en voici une qui consiste à commencer par résoudre les deux premières équations.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\lambda & - & 3\mu & = & -12 \\ -3\lambda & - & 7\mu & = & -5 \end{array} \right. \overset{2②+3①}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\lambda & - & 3\mu & = & -12 \\ & - & 23\mu & = & -46 \end{array} \right.$$

On a trouvé $\mu = 2 \implies$ le point d'intersection pourrait donc être $I(4;-7;3)$.
En mettant I dans d_1, on trouve $\lambda = -3$ pour les deux premières coordonnées.
La 3e coordonnée ne joue pas avec $\lambda = -3$, donc d_1 et d_2 sont gauches.

3. Calculer la droite d d'intersection des plans suivants.

$$\pi_1 : \ 5x + 3y + z = 15 \qquad \text{et} \qquad \pi_2 : \ 3x + 2y + z = 11$$

On cherche $I(x;y;z)$ un point d'intersection de π_1 et de π_2.
Comme il y a plus d'inconnues que d'équation, on peut choisir $z = 0$.
Si ce choix pose problème $x = 0$ ou $y = 0$ sont d'autres choix possibles.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \overset{3\textcircled{1} - 5\textcircled{2}}{\iff} \begin{cases} \quad - y = -10 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

On a trouvé $y = 10$. En substituant dans la deuxième équation, on trouve

$$3x + 20 = 11 \iff 3x = -9 \iff x = -3$$

Un point d'intersection est donc $I(-3;10;0)$. Vérifier dans les deux équations.

Le produit vectoriel des vecteurs normaux de π_1 et π_2
est un vecteur directeur de d.

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies d : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 10 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Vérifier les produits scalaires !

Résolution de l'exercice 284

Fait en classe.

♡ **Exercice 285 : projections orthogonales d'un point** (2 fois 5 minutes)

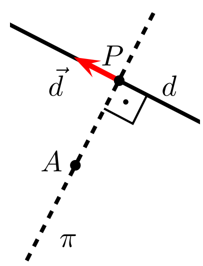
1. Calculer la projection orthogonale du point $A(2;2;-15)$ sur la droite suivante.

$$d : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

La projection orthogonale, notée P, est à l'intersection de d et du plan π
où le plan π est le plan qui est orthogonal à la droite d et qui passe par A.

Le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur à la droite d.

On voit que $\vec{d}$ est aussi un vecteur normal du plan π.



$$\pi : \ x + 2y - 4z = 66$$

On substitue les variables de la représentation paramétrique
dans l'équation cartésienne et on résout.

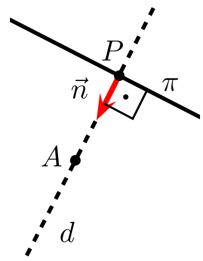
$$(3+\lambda) + 2(2+2\lambda) - 4(1-4\lambda) = 66$$
$$\iff 3 + 21\lambda = 66 \iff 21\lambda = 63 \iff \lambda = 3$$

On substitue cette valeur de λ dans la représentation paramétrée,
et on obtient $P(6;8;-11)$. Vérification : remplacer dans l'équation cartésienne.

2. Calculer la projection orthogonale du point $A(11;8;-2)$ sur le plan suivant.

$$\pi:\ 3x + y + 2z = 9$$

La projection orthogonale, notée P, est à l'intersection de π et de (AP) où la droite (AP) est la droite qui est orthogonale au plan π et qui passe par A.



Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan π.

On voit que $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AP).

$$(AP):\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 11 & + & 3\lambda \\ y & = & 8 & + & \lambda \\ z & = & -2 & + & 2\lambda \end{array}\right.,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

On substitue les variables de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne et on résout.

$$3(11+3\lambda) + (8+\lambda) + 2(-2+2\lambda) = 9$$
$$\iff 37 + 14\lambda = 9 \iff 14\lambda = -28 \iff \lambda = -2$$

On substitue cette valeur de λ dans la représentation paramétrée, et on obtient $P(5;6;-6)$. Vérification : remplacer dans l'équation cartésienne.

Résolution de l'exercice 286

Les vecteurs directeurs des droites sont tous parallèles à $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donc les trois droites sont parallèles ou confondues !

Pour distinguer si deux droites sont parallèles ou confondues, on prend un point quelconque d'une droite et on vérifie s'il est sur l'autre.

Le point $(1; 2; 3)$ de la droite d_1 (qui correspond à $\lambda = 0$) est sur d_2 (il correspond à $\mu = \frac{1}{3}$), mais pas sur d_3 (il correspondrait à $\nu = 3$ pour la deuxième équation, mais cela ne joue pas pour la première équation (ni la troisième)).

Donc les droites d_1 et d_2 sont confondues, et les droites d_1 et d_3 sont parallèles.

Déduction : les droites d_2 et d_3 sont parallèles (car $d_1 = d_2$).

Les vecteurs normaux des plans sont tous parallèles à $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc les trois plans sont parallèles ou confondus !

Pour distinguer si deux plans sont parallèles ou confondus, on prend un point quelconque d'un plan et on vérifie s'il est sur l'autre.

Le point $(0; 0; -3)$ du plan π_1 (l'équation cartésienne est vérifiée, car $0 + 0 + 9 = 9$) n'est pas sur π_2 (l'équation cartésienne n'est pas vérifiée, car $0 + 0 + 3 \neq 7$), mais est sur π_3 (l'équation cartésienne est vérifiée, car $0 + 0 + 6 = 6$).

Donc les plans π_1 et π_3 sont confondues, et les plans π_1 et π_2 sont parallèles.

Déduction : les plans π_2 et π_3 sont parallèles (car $\pi_1 = \pi_3$).

Les vecteurs normaux des plans sont tous orthogonaux aux vecteurs directeurs des droites.

$$\text{c'est le cas, car } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 2 - 4 = 0$$

Donc les droites sont toutes parallèles ou incluses dans les plans !

Pour distinguer si une droite est parallèle ou incluse dans un plan, on prend un point quelconque de la droite et on vérifie s'il est sur le plan (et pas le contraire).

Le point $(1; 2; 3)$ de la droite d_1 (qui correspond à $\lambda = 0$) est sur π_1 (l'équation cartésienne est vérifiée, car $6 + 12 - 9 = 9$), donc d_1 est incluse dans π_1.

Déduction : la droite d_1 est incluse dans π_3 et parallèle à π_2 ; la droite d_2 est incluse dans π_1 et π_3, et parallèle à π_2 ; la droite d_3 est parallèle à π_1 et π_3.

Il reste à voir si d_3 est parallèle ou incluse dans π_2 : le point $(3; 5; 2)$ de la droite d_3 (qui correspond à $\nu = 0$) n'est pas sur π_2 (l'équation cartésienne n'est pas vérifiée, car $6 + 10 - 2 \neq 7$), donc la droite d_3 est parallèle à π_2.

2.25 Géométrie 3D : norme, produit scalaire, produit vectoriel et déterminant

Résolution de l'exercice 287

Fait en classe.

♡ **Exercice 288 : géométrie 3D - périmètre, aire, volume, angle** (9 fois 5 minutes)

1. Soit $A(3;3;2)$, $B(2;1;5)$ et $C(1;6;1)$ trois points.
   Calculer l'angle β du triangle ABC.

   Correction

   L'angle β est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Ainsi

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{42}} = \frac{21}{14\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Donc $\beta = 30°$.

2. Soit $A(1;-3;5)$, $B(4;0;5)$ et $C(3;-2;4)$ trois points.
   Calculer l'angle γ du triangle ABC.

   Correction

   L'angle γ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$. Ainsi

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

   Donc $\gamma = 120°$.

3. Soit $A(2;2;2)$, $B(1;-2;3)$ et $C(6;3;1)$ trois points.
   Calculer l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle ABC.

   Correction

   L'angle $\widehat{ABC}$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Ainsi

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{54}} = \frac{27}{18\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Donc $\widehat{ABC} = 30°$.

4. Soit $A(1;3;-5)$, $B(1;4;-9)$ et $C(-2;5;-7)$ trois points.
   Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

   Correction

   Le périmètre est égal à

$$\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|+\|\overrightarrow{CA}\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{17}+\sqrt{14}+\sqrt{17}$$

On a choisi dans cet ordre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$, car leur somme vaut $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Ce qui permet d'avoir une vérification !

L'aire est égale à $$\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}\right\|}{2}\underset{\uparrow}{=}\frac{\left\|\begin{pmatrix}6\\12\\3\end{pmatrix}\right\|}{2}=\frac{3\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\right\|}{2}=\frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

Vérifiez les produits scalaires

5. Soit $A(-2;-2;1)$, $B(-2;-1;6)$ et $C(1;-3;5)$ trois points.
   Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

   Correction

   Le périmètre est égal à

$$\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|+\|\overrightarrow{CA}\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}-3\\1\\-4\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{26}+\sqrt{14}+\sqrt{26}$$

On a choisi dans cet ordre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$, car leur somme vaut $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Ce qui permet d'avoir une vérification !

L'aire est égale à $$\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right\|}{2}\underset{\uparrow}{=}\frac{\left\|\begin{pmatrix}9\\15\\-3\end{pmatrix}\right\|}{2}=\frac{3\left\|\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}\right\|}{2}=\frac{3\sqrt{35}}{2}.$$

Vérifiez les produits scalaires

6. Soit $A(3;-2;5)$, $B(-2;3;0)$ et $C(-1;1;3)$ trois points.

   Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.

   Correction

   Le périmètre est égal à

$$\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|+\|\overrightarrow{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix}-5\\5\\-5\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{75}+\sqrt{14}+\sqrt{29}$$

On a choisi dans cet ordre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$, car leur somme vaut $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Ce qui permet d'avoir une vérification !

L'aire est égale à $\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} = \dfrac{\left\|\begin{pmatrix}-5\\5\\-5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}\right\|}{2} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{\left\|\begin{pmatrix}5\\10\\5\end{pmatrix}\right\|}{2} = \dfrac{5\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\|}{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}.$

Vérifiez les produits scalaires

7. Soit $A(3;1;-2)$, $B(-2;5;-1)$, $C(5;3;-3)$ et $S(4;-1;1)$ quatre points.

   Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.

   Correction

   Le volume signé du tétraèdre est le sixième du produit mixte.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AS}\right) &= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right)\right)\\ &\underset{\uparrow}{=} \tfrac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}4\\-7\\-6\end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot(-54) = -9\end{aligned}$$

Vérifiez les produits scalaires

Donc le volume vaut 9.

8. Soit $A(2;-1;3)$, $B(7;-6;7)$, $C(3;1;2)$ et $S(1;-5;2)$ quatre points.

   Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.

   Correction

   Le volume signé du tétraèdre est le sixième du produit mixte.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AS}\right) &= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}5\\-5\\4\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \tfrac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}5\\-5\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-6\\2\\-2\end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot(-48) = -8\end{aligned}$$

$\uparrow$

Vérifiez les produits scalaires

   Donc le volume vaut 8.

9. Soit $A(2;5;2)$, $B(1;12;3)$, $C(3;8;3)$ et $S(2;6;4)$ quatre points.

   Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$.

   Correction

   Le volume signé du tétraèdre est le sixième du produit mixte.

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AS}\right) &= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}-1\\7\\1\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \tfrac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}-1\\7\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot(-18) = -3\end{aligned}$$

$\uparrow$

Vérifiez les produits scalaires

   Donc le volume vaut 3.

2.26 Géométrie 3D : calcul de distances

✠ Exercice 290 : trop facile pour les contrôles de devoirs

1. Calculer la distance du point $A(4;3;-5)$ à la droite $d:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 && \\ y &=& -1 &+& \lambda \\ z &=& 4 &-& 3\lambda \end{array}\right. , \quad \lambda\in\mathbb{R}.$

   Correction

   Point de d : $P_0(2;-1;4)$.

   Vecteur directeur de d : $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$.

   La distance est

$$d(d,A)=\frac{\|\overrightarrow{P_0A}\wedge\vec{d}\,\|}{\|\vec{d}\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\-9\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{10}}\underset{\uparrow}{=}\frac{\left\|\begin{pmatrix}-3\\6\\2\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{10}}$$

   Vérifiez les produits scalaires

2. Calculer la distance du point $A(7;-1;3)$ au plan $\pi:\ 2x+3y-4z=10$.

   Correction

   Point de π : $P_0(5;0;0)$.

   Vecteur normal de π : $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

   La distance signée est

$$\delta(\pi,A)=\frac{\overrightarrow{P_0A}\bullet\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}}{\sqrt{29}}=\frac{-11}{\sqrt{29}}$$

   Donc la distance vaut $\dfrac{11}{\sqrt{29}}$.

♡ Exercice 291 : géométrie 3D - calcul de distance (4 fois 5 minutes)

1. On considère les droites suivantes.

$$d_1:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 5 &+& 3\lambda \\ y &=& 6 &-& 6\lambda \\ z &=& 1 &-& 18\lambda \end{array}\right. , \ \lambda\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 5 &-& 2\mu \\ y &=& 4 &+& 4\mu \\ z &=& -2 &+& 12\mu \end{array}\right. , \ \mu\in\mathbb{R}$$

   Montrer que les droites sont parallèles ou confondues et calculer la distance qui les sépare.

   Correction

   Les *vecteurs directeurs* sont parallèles au vecteur $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$
   $\Longrightarrow$ les droites sont parallèles ou confondues.

   Point de d_1 : $P_1(5;6;1)$. *Point de* d_2 : $P_2(5;4;-2)$.

   La distance est

$$d(d_1,d_2)=d(P_1,d_2)=\frac{\|\overrightarrow{P_2P_1}\wedge\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{41}}\underset{\uparrow}{=}\frac{\left\|\begin{pmatrix}-6\\3\\-2\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{41}}=\frac{7}{\sqrt{41}}$$

   Vérifiez les produits scalaires

2. On considère les droites suivantes.

$$d_1 : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 - 9\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 + \mu \\ z = 4 - 6\mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites sont sécantes ou gauches et calculer la distance qui les sépare.

Correction

Les *vecteurs directeurs* $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas parallèles.
$\Longrightarrow$ les droites sont sécantes ou gauches.

Point de d_1 : $P_1(-2;3;2)$. *Point de* d_2 : $P_2(3;4;4)$.
Vecteur normal à d_1 *et à* d_2

$$\vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifiez les produits scalaires !

La distance signée est

$$\delta(d_1, d_2) = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{46}} = \frac{-7}{\sqrt{46}}$$

Donc la distance vaut $\dfrac{7}{\sqrt{46}}$.

3. On considère la droite et le plan suivants.

$$d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 9 & - & 7\lambda \\ y & = & 1 & + & 4\lambda \\ z & = & -2 & + & 3\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \pi : \ x - 2y + 5z = 3$$

Montrer que la droite est parallèle au plan ou incluse dans le plan et calculer leur distance.

Correction

Vecteur directeur de d : $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Vecteur normal de* π : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{d} \bullet \vec{n} = 0 \iff \vec{d} \perp \vec{n} \iff \text{la droite est parallèle au plan ou incluse dans le plan}$$

Point de d : $A(9;1;-2)$. *Point de* π : $P_0(3;0;0)$.

La distance signée est

$$\delta(d,\pi) = \delta(A,\pi) = \frac{\overrightarrow{P_0A} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{30}} = \frac{-6}{\sqrt{30}}$$

Donc la distance vaut $\dfrac{6}{\sqrt{30}}$.

4. On considère les plans suivants.

$$\pi_1 : \ 3x - 9y + 6z = -21 \qquad \text{et} \qquad \pi_2 : \ -2x + 6y - 4z = 10$$

Montrer que les plans sont parallèles ou confondus et calculer la distance qui les sépare.

Correction

Les *vecteurs normaux* sont parallèles au vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow$ les plans sont parallèles ou confondus.

Point de π_1 : $P_1(-7;0;0)$. *Point de* π_2 : $P_2(-5;0;0)$.

La distance signée est

$$\delta(\pi_1,\pi_2) = \delta(P_1,\pi_2) = \frac{\overrightarrow{P_2P_1} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$

Donc la distance vaut $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

Résolution de l'exercice 292

Fait en classe.

2.27 Géométrie 3D : boîte à outils

Résolution de l'exercice 293

1. On a
$$\widehat{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \widehat{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \qquad \widehat{v}_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\-4\\7\end{pmatrix} \qquad \widehat{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$$

2. La formule est
$$\boxed{\widehat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}} \qquad \text{il faut comprendre } \widehat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v}$$

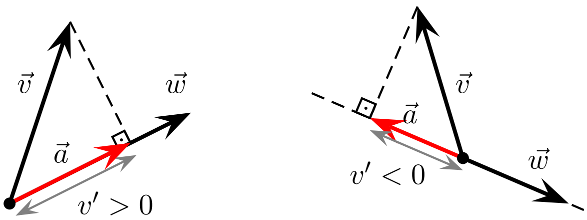
Preuve 1

On pose $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Ainsi
$$\|\widehat{v}\| = \left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v}\right\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{pmatrix}\right\|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2} = 1$$

Preuve 2 (plus générale)
$$\|\widehat{v}\| = \left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v}\right\| \overset{\boxed{\|\lambda\cdot\vec{v}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{v}\|}}{=} \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\|\vec{v}\| = 1$$

Résolution de l'exercice 294

Le dessin ci-dessous montre que la longueur signée de $\vec{a}$ est donnée par la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{w}$, notée v'. Rappelons que v' est négatif ssi l'angle entre les vecteurs est obtus.



Ainsi
$$\vec{a} \;=\; \text{«longueur signée de } \vec{a}\text{»} \cdot \text{«un vecteur de longueur 1, de même sens que } \vec{w}\text{»}$$
$$= v'\cdot\widehat{w} = \frac{\vec{v}\bullet\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\cdot\frac{\vec{w}}{\|w\|} = \frac{\vec{v}\bullet\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\cdot\vec{w} = \frac{\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{6}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

On trouve $\vec{b}$ en se souvenant que $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$.
$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \iff \vec{b} = \vec{v} - \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}9\\5\\-2\end{pmatrix}$$

Vérification : les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires car leur produit scalaire donne 0.

Résolution de l'exercice 295

Les droites sont bien sécantes, elles se coupent évidemment en $(3;-2;1)$ ($\lambda = 0$, $\mu = 0$).

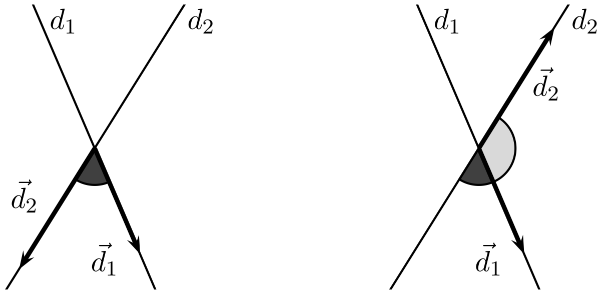
Il n'y a pas besoin d'avoir de point d'intersection pour calculer l'angle aigu entre deux droites

(au cas où elles seraient gauches, l'angle obtenu est celui qu'on voit si on regarde perpendiculairement les droites ; au cas où elles seraient parallèles, l'angle obtenu est nul).

Notion invoquée : angle entre deux vecteurs.

On utilise les vecteurs directeurs de chaque droite. Il y a deux possibilités.

Schéma pour la réflexion



Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de d_2 est $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'angle α entre ces deux vecteurs est donné par la relation suivante.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{d_1} \bullet \vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-15}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{54}} \overset{54=9\cdot 6}{\Longrightarrow} \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{84}}\right) \cong 123.06°$$

Ainsi, α n'est pas l'angle aigu (en gras sur le schéma). La situation est celle de droite. Le bon angle, noté $\angle(d_1, d_2)$, satisfait

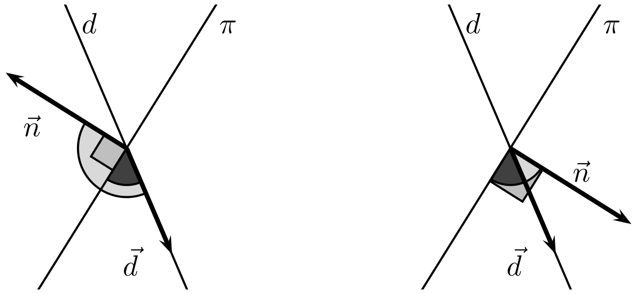
$$\angle(d_1, d_2) + \alpha = 180° \iff \angle(d_1, d_2) = 180° - \alpha \cong 56.94°$$

Résolution de l'exercice 296

On utilise un vecteur directeur et un vecteur normal. Il y a deux possibilités.

Il n'y a pas besoin d'avoir le point d'intersection pour calculer l'angle aigu entre une droite et un plan.

Schéma pour la réflexion en dessinant le plan de profil



Un vecteur directeur de d est $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un vecteur normal de π est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

L'angle α entre ces deux vecteurs est donné par la relation suivante.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{d} \bullet \vec{n}}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-1}{\sqrt{123} \cdot \sqrt{59}} \implies \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{7257}} \right) \cong 90.67°$$

Ainsi, α est obtus. La situation est donc celle de gauche. Le bon angle, noté $\angle(d, \pi)$, satisfait

$$\angle(d, \pi) + 90° = \alpha \iff \angle(d, \pi) = \alpha - 90° \cong 0.67°$$

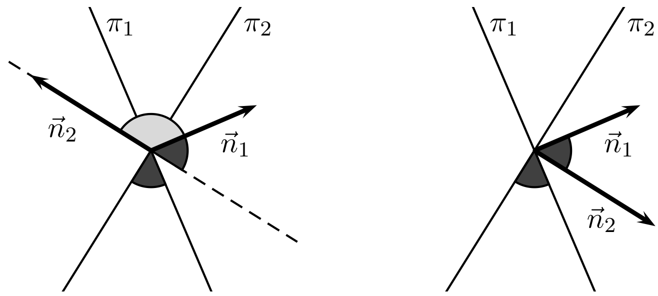
Si on avait été dans la situation de droite, alors la relation aurait été $\angle(d, \pi) = 90° - \alpha$.

Résolution de l'exercice 297

On utilise deux vecteurs normaux. Il y a deux possibilités.

Il n'y a pas besoin d'avoir la droite d'intersection pour calculer l'angle aigu entre deux plans.

Schéma pour la réflexion en dessinant les plans de profil



Un vecteur normal de π_1 est $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Un vecteur normal de π_2 est $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'angle α entre ces deux vecteurs est donné par la relation suivante.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} \implies \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{406}} \right) \cong 92.84°$$

Ainsi, α n'est pas l'angle aigu (en gras sur le schéma). La situation est celle de gauche. Le bon angle, noté $\angle(\pi_1, \pi_2)$, satisfait

$$\angle(\pi_1, \pi_2) + \alpha = 180° \iff \angle(\pi_1, \pi_2) = 180° - \alpha \cong 87.16°$$

Résolution de l'exercice 298

Dans l'ordre les termes sont : $\boxed{\text{sécantes}}$, $\boxed{\text{gauches}}$, $\boxed{\text{parallèles}}$, $\boxed{\text{confondues}}$.

Dans l'ordre les termes sont : {le point I}, $\emptyset$, $\emptyset$, $d_1 = d_2$.

Dans l'ordre les conditions sont : $\vec{d_1} \nparallel \vec{d_2}$, $\vec{d_1} \parallel \vec{d_2}$.

Les stratégies sont les suivantes.

· Lorsque les droites sont sécantes ou gauches.

Contrairement à la situation en géométrie plane où il y a trois manières de procéder, il ne reste plus que la possibilité de combiner les représentations paramétriques des deux droites pour trouver un éventuel point d'intersection. Il faut donc résoudre trois équations à deux inconnues (une équation pour x, une pour y, une pour z ; les inconnues sont les deux paramètres, souvent appelés λ et μ).

Comme on a trois équations à deux inconnues, on peut choisir d'ignorer, temporairement, une des trois équations. Dès qu'on trouve soit λ, soit μ, on peut remplacer dans la représentation paramétrique correspondante et trouver un candidat pour le point d'intersection.

Comme les droites peuvent être gauches, il faut ABSOLUMENT VÉRIFIER que ce candidat est aussi un point de l'autre droite. Si c'est le cas, les droites sont sécantes et le point d'intersection vient d'être trouvé ; si ce n'est pas le cas, alors les droites sont gauches.

Cette manière de faire est présentée dans l'OB31.

· Lorsque les droites sont parallèles ou confondues.

Le plus simple est de prendre un point d'une droite et de vérifier s'il est sur l'autre. Si c'est le cas, les droites sont confondues ; si ce n'est pas le cas, elles sont parallèles.

Résolution de l'exercice 299

Dans l'ordre les termes sont :

$\boxed{\text{le plan coupe la droite}}$ $\boxed{\text{le plan est parallèle à la droite}}$ $\boxed{\text{la droite est incluse dans le plan}}$

Dans l'ordre les termes sont : {le point I}, $\emptyset$, d.

Dans l'ordre les conditions sont : $\vec{n} \not\perp \vec{d}$, $\vec{n} \perp \vec{d}$.

Les stratégies sont les suivantes.

· Lorsque le plan coupe la droite (ou la droite transperce le plan).

On insère les équations paramétriques de la droite dans l'équation du plan, et on trouve une valeur pour le paramètre, qui nous donnera le point de la droite I (qui est aussi sur le plan).

Cette manière de faire est présentée dans l'OB31.

· Lorsque la droite est parallèle ou incluse dans le plan.

Le plus simple est de prendre un point de la droite et de vérifier s'il est sur le plan. Si c'est le cas, les droites est incluse dans le plan ; si ce n'est pas le cas, la droite est parallèle au plan.

On peut aussi tenter de chercher l'intersection comme quand le plan coupe la droite. Dans le cas où la droite est incluse dans le plan, toute valeur du paramètre sera solution (équation du type $0 = 0$) ; dans le cas où la droite est parallèle au plan, aucune valeur du paramètre ne sera solution (équation du type $1 = 0$).

Résolution de l'exercice 300

Dans l'ordre les termes sont : $\boxed{\text{sécants}}$, $\boxed{\text{parallèles}}$, $\boxed{\text{confondus}}$.

Dans l'ordre les termes sont : la droite d, $\emptyset$, $\pi_1 = \pi_2$.

Dans l'ordre les conditions sont : $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$.

Les stratégies sont les suivantes.

- Lorsque les plans sont sécants.

  On doit résoudre deux équations (les deux équations cartésiennes) à trois inconnues (x, y et z). Cela fait une inconnue de trop, on peut donc choisir une valeur de x, de y ou de z comme bon nous plait. On trouvera les valeurs des deux autres lettres en résolvant le système de deux équations à deux inconnues. Cela permet de trouver un point.
  On peut trouver un autre point avec un autre choix (pour une valeur de x, de y ou de z), ou simplement remarquer que les vecteurs normaux des plans sont des vecteurs normaux à la droite d'intersection, et que le produit vectoriel de ces vecteurs normaux donnera un vecteur directeur de la droite d.

  Cette manière de faire est présentée dans l'OB31.

- Lorsque les plans sont parallèles ou confondus.

  Le plus simple est de prendre un point d'un plan et de vérifier s'il est sur l'autre. Si c'est le cas, les plans sont confondues ; si ce n'est pas le cas, ils sont parallèles.

Résolution de l'exercice 301

Dans l'ordre les termes sont : $\boxed{\text{disjointes}}$, $\boxed{\text{tangentes}}$, $\boxed{\text{sécantes}}$.

Dans l'ordre les termes sont : $\emptyset$, $\{I\}$, $\{I_1, I_2\}$.
Noter I le point rouge du dessin au milieu ; noter I_1 et I_2 les points rouges du dessin de droite.

Dans l'ordre les conditions sont : $\boxed{d(C,d) > r}$, $\boxed{d(C,d) = r}$ et $\boxed{d(C,d) < r}$.

Résolution de l'exercice 302

Dans l'ordre les termes sont : $\boxed{\text{disjoints}}$, $\boxed{\text{tangents}}$, $\boxed{\text{sécants}}$.

Dans l'ordre les termes sont : $\emptyset$, $\{I\}$, cercle rouge.
Noter I le point rouge du dessin au milieu.

Dans l'ordre les conditions sont : $\boxed{d(C,\pi) > r}$, $\boxed{d(C,\pi) = r}$ et $\boxed{d(C,\pi) < r}$.

Résolution de l'exercice 303

1. L'équation est $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=25$.

2. On utilise la forme canonique des polynômes de degré 2 (OB6) comme pour les cercles en 2D.

$$\begin{array}{llllllll} & x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=-10 \\ \Longleftrightarrow & x^2-2x & + & y^2+4y & + & z^2-6z & = & -10 \\ \Longleftrightarrow & (x-1)^2-1 & + & (y+2)^2-4 & + & (z-3)^2-9 & = & -10 \\ \Longleftrightarrow & (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=2^2 \end{array}$$

On constate que la sphère est de centre $C(1;-2;3)$ et de rayon 2.

Résolution de l'exercice 304

On écrit l'équation de la sphère en utilisant la forme canonique des polynômes du deuxième degré (OB6), après avoir divisé chaque membre de l'équation par deux.

$$(x+3)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=49$$

Donc la sphère est de rayon 7 et centrée en $C(-3;5;-2)$.

On calcule la distance entre la droite et le centre de la sphère : elle vaut $\sqrt{57}$.

Cette distance étant plus grande que le rayon, la distance cherchée vaut $\sqrt{57}-7$.
Si elle avait été plus petite ou égale au rayon, alors la distance cherchée aurait été nulle.

Résolution de l'exercice 305

On écrit l'équation de la sphère en utilisant la forme canonique des polynômes du deuxième degré (OB6).

$$(x+3)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=36$$

Donc la sphère est de rayon 6 et centrée en $C(-3;5;1)$.

On calcule la distance entre le plan et le centre de la sphère : elle vaut $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

Cette distance étant plus petite que le rayon, la distance cherchée vaut 0.

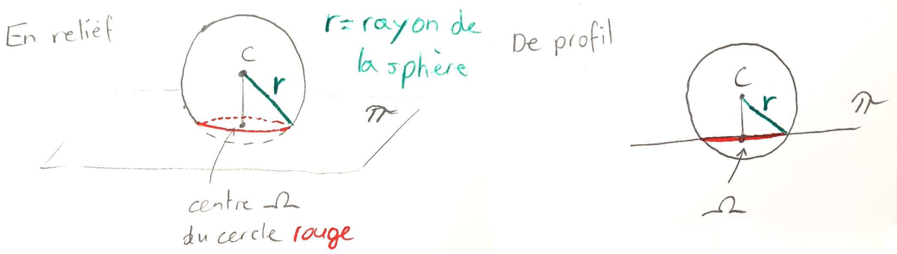
Résolution de l'exercice 306

En substituant les équations paramétriques de la droite dans l'équation de la sphère, on se ramène à résoudre une équation du deuxième degré afin de trouver la valeur du paramètre de la droite qui correspond aux points d'intersection qui sont $B(2;4;-2)$ et $I(\frac{5}{7};\frac{1}{7};-\frac{32}{7})$.

Résolution de l'exercice 307

1. On montre que la distance du centre C au plan est plus petite que le rayon, qui vaut 50. C'est bien le cas, car elle vaut 14.

2. Faisons un schéma.



Le centre Ω est la projection du point C sur le plan π. En calculant cette projection orthogonale, on trouve $\Omega(6;16;8)$.

Le rayon se trouve grâce à Pythagore (en utilisant soit la distance calculée en 1., soit la distance entre C et Ω qui est donnée par la norme $\|\overrightarrow{C\Omega}\|$). Il vaut 48.

Résolution de l'exercice 308

Condition sur $P(x;y;z)$: $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$.

$$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP} \iff \overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=0 \iff \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \\ z-z_B \end{pmatrix}=0$$

$$\iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

$$\iff x^2-(x_A+x_B)x+x_Ax_B+y^2-(y_A+y_B)y+y_Ay_B+z^2-(z_A+z_B)y+z_Az_B=0$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2-\frac{(x_A+x_B)^2}{4}+x_Ax_B+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-\frac{(y_A+y_B)^2}{4}+y_Ay_B+\left(z-\frac{z_A+z_B}{2}\right)^2-\frac{(z_A+z_B)^2}{4}+z_Az_B=0$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_A+z_B}{2}\right)^2=\frac{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B+(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B+(z_A+z_B)^2-4z_Az_B}{4}$$

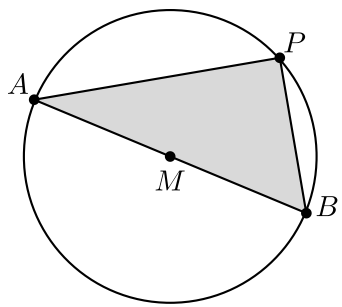
$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_A+z_B}{2}\right)^2=\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}{4}$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_A+z_B}{2}\right)^2=\left(\frac{x_A-x_B}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A-y_B}{2}\right)^2+\left(\frac{z_A-z_B}{2}\right)^2$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2+\left(z-\frac{z_A+z_B}{2}\right)^2=\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}\right\|^2$$

$$\iff (x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=\left(\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\right)^2$$

C'est l'équation de la sphère de centre $M(x_M;y_M;z_M)=\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ et dont le rayon est la moitié de la longueur du segment $[AB]$. C'est la sphère de Thalès !



2.28 Géométrie 3D : problèmes de géométrie

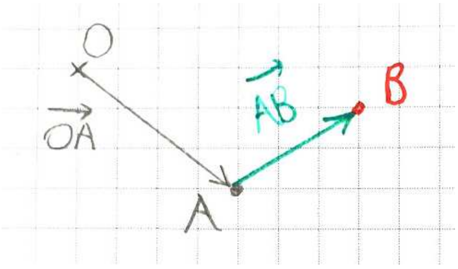
Résolution de l'exercice 309

Cet exercice est là pour se rendre compte qu'on peut parfois simplement utiliser des vecteurs, comme en première année, pour résoudre des problèmes.

Il est important de remarquer que si on cherche un point $P(x;y;z)$, alors c'est équivalent à chercher le vecteur $\overrightarrow{OP}$. En effet, on a

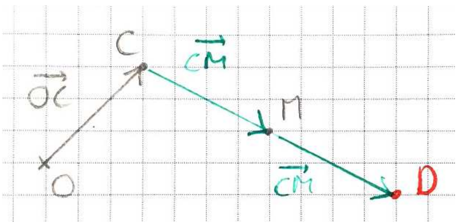
$$P(x;y;z) \iff \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. On fait un schéma



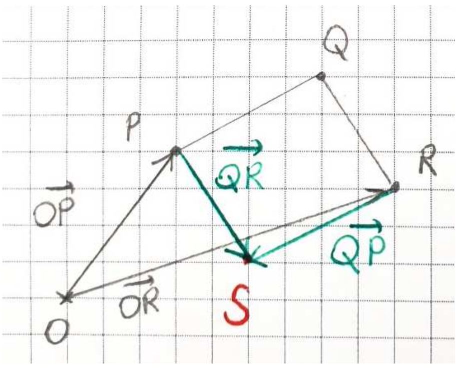
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

2. On fait un schéma



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CM} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{CM}$$

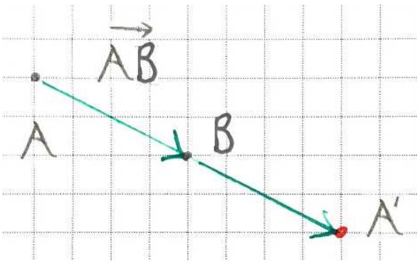
3. On fait un schéma



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{QP} \quad \text{ou d'autres manières encore}$$

Résolution de l'exercice 310

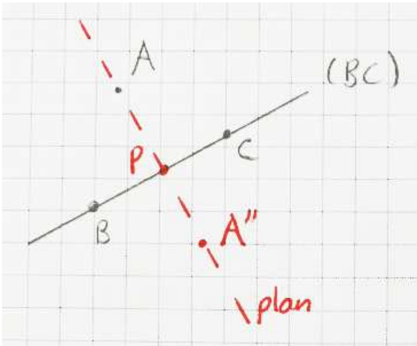
1. On fait un schéma



On a :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad A'(-17; 10; -15)$$

2. On fait un schéma

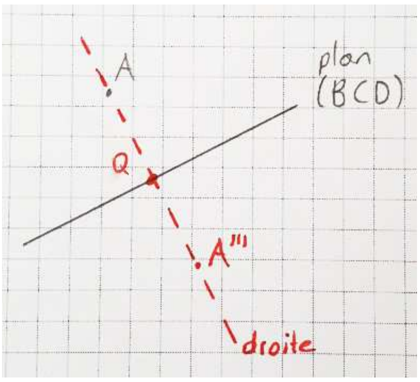


On calcule la projection orthogonale de A sur (BC). On trouve $P(3; 2; 4)$ (grâce au plan dont l'équation est $5x + y + 4z = 33$).

Ensuite :

$$\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} \quad\Longrightarrow\quad A''(3; 14; 1)$$

3. On fait un schéma



L'équation cartésienne du plan BCD est $(BCD) : x + 3y - 2z = 1$.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont des vecteurs directeurs dont le produit vectoriel est un vecteur normal de (BCD) !

On calcule la projection orthogonale de A sur (BCD). On trouve $Q(6; -1; 1)$.

Ensuite, soit on calcule $\overrightarrow{OA'''} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AQ}$, soit on remarque que Q correspond à un paramètre et que donc A''' correspond au double de ce paramètre.

Donc $A'''(9; 8; -5)$.

Résolution de l'exercice 311

1. Pour trouver un vecteur normal du plan, on calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, on trouve

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Ainsi une équation cartésienne est $\pi : 2x + y + z = 12$.

2. La distance du point C à la droite (AB) est donnée par

$$d(C, (AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \cdots = \frac{12\sqrt{30}}{5}$$

L'aire du triangle ABC est donnée par

$$\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \cdots = 36\sqrt{6}$$

3. L'angle entre la droite (AO) avec la droite (AC) vaut environ $63.43°$.

L'angle entre la droite (AO) avec le plan (ABC) vaut environ $54.74°$.

4. On projette orthogonalement l'origine sur le plan (ABC) : on trouve $H(4; 2; 2)$.

La hauteur est orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et à $\vec{n}$. Elle est donc parallèle à

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la représentation de la hauteur est

$$h_C : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & & + & 2k \\ y & = & & + & k \\ z & = & 12 & - & 5k \end{array} \right. , \quad k \in \mathbb{R}$$

On retrouve le point H pour $k = 2$.

5. La médiatrice au segment $[AB]$ dans le triangle ABC, notée m_C, est parallèle à la hauteur h_C et passe par le milieu de $[AB]$. Il ne reste qu'à trouver le milieu, qui est $(3; 6; 0)$.

$$m_C : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & 2t \\ y & = & 6 & + & t \\ z & = & & - & 5t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

Le plan médiateur au segment $[BC]$: $y - z = 0$.

Le centre du cercle circonscrit est à l'intersection, donc est $\Omega(1; 5; 5)$.
Son rayon est donné par $r = d(\Omega, A) = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = 5\sqrt{3}$.

Résolution de l'exercice 312

1. On a $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ -50 \\ 6 \end{pmatrix} = -64 + 100 - 36 = 0.$

   Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux. CQFD !

2. Le vecteur normal du plan π est $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 8 \\ -50 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -312 \\ 0 \\ 416 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{n}.$

   Ainsi, on a $\pi : 3x - 4z = -22$ (passe par A, B et C).

3. L'aire du triangle ABC est donnée par $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right\| = \frac{1}{2} \cdot 104 \cdot \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = 52 \cdot 5 = 260.$

4. Pour trouver l'angle β, on résout $\cos(\beta) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -16 \\ 48 \\ -12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -8 \\ 50 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{2704} \cdot \sqrt{2600}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}.$

   Ainsi $\beta \cong 11.310°$.

5. Le centre appartient à la droite (AB) et au plan médiateur du segment $[AC]$, noté m_{AC}.

   Point de m_{AC} : $M(-6; 33; 1)$; vecteur normal de m_{AC} : $\overrightarrow{AC} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$(AB) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -10 & + & 4\lambda \\ y & = & 32 & - & 12\lambda \\ z & = & -2 & + & 3\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad m_{AC} : 4x + y + 3z = 12$$

   Pour trouver le centre du cercle, on substitue les équations paramétriques de (AB) dans m_{AC}.

$$4(-10 + 4\lambda) + (32 - 12\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) = 12 \iff 13\lambda = 26 \iff \lambda = 2$$

   Ainsi, le centre est $\Omega(-2; 8; 4)$. Le rayon vaut $\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \left\|\begin{pmatrix} -8 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = 2\left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{169} = 26.$

   Autre stratégie :

   Comme le triangle ABC est rectangle en C, on peut affirmer que C est sur le cercle de Thalès du segment $[AB]$, donc que son centre est le milieu du segment $[AB]$: $\Omega(-2; 8; 4)$. Ainsi, les points A et B sont des points du cercle diamétralement opposés.

   Pour le rayon, c'est la moitié de la longueur du segment $[AB]$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 313

On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 21 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Pour trouver un vecteur normal du plan, on calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, on trouve $\vec{n} = \begin{pmatrix} 75 \\ 105 \\ 15 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Ainsi une équation cartésienne est $\pi : 5x + 7y + z = 2$

2. L'équation de la donnée est équivalente à

   $$(x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - 448 = 0 \iff (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 450$$

   Donc le centre est $\Omega(-1; 1; 0)$ et le rayon est $\sqrt{450} = 15\sqrt{2}$.

3. On a $\|\overrightarrow{\Omega T}\| = \left\| \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{225 + 81 + 144} = \sqrt{450}$. On obtient bien le rayon de la sphère.

   Les trois points A, Ω et T sont alignés ssi $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{AT} = \vec{0}$. Ici, on a

   $$\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 + 24 \\ -(40 - 40) \\ 30 - 30 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

   Donc, les points sont bien alignés.

4. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega T} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est normal au plan p.
   Le point $T(14; -8; -12)$ est sur le plan p.
   Ainsi, une équation cartésienne est $p : 5x - 3y - 4z = 142$.

5. Un angle α (obtu ou aigu) entre les droites (AB) et (AC) satisfait

   $$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 21 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{450}\sqrt{50}} = \frac{9 - 84}{3\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{-75}{3 \cdot 50} = -\frac{1}{2}$$

   Ainsi $\alpha = 120°$, et l'angle aigu entre les deux droites vaut $180° - \alpha = 60°$.

6. Le point D se trouve sur la droite (AB) et sur le plan médiateur au segment $[AC]$.

   Le plan médiateur passe par le milieu du segment $[AC]$ qui est $M(\frac{13}{2}; -\frac{7}{2}; -6)$.

   Un vecteur normal du plan médiateur est le vecteur $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   Donc le plan médiateur est d'équation $5x - 3y - 4z = 67$.
   La droite (AB) est donnée par

   $$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 + \lambda \\ z = -4 - 7\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   On substitue et on résout.

   $$5(4) - 3(-2 + \lambda) - 4(-4 - 7\lambda) = 67 \iff 25\lambda = 25 \iff \lambda = 1$$

   Le point cherché est $D\,(4; -1; -11)$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 314

1. $B(0;8;0)$.
2. $C(8;14;0)$ et $D(14;6;0)$. Le dessin peut être fait en 3D ou seulement dans le plan xy.
3. $E(6;0;10)$, $F(0;8;10)$, $G(8;14;10)$ et $H(14;6;10)$.
4. $(EFG) : z = 10$.
5. $(x-7)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 75$.
6. $T(7;7;5+5\sqrt{3})$.
7. $\frac{3400}{3}$ m^3.
8. $20\sqrt{41}$ m^2.
9. $z_L = 12$.
10. $\cos^{-1}(\frac{25}{41}) \cong 52.43°$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 315

1. Le vecteur normal du plan π est $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$.

   On trouve le vecteur normal du plan (ABC) à l'aide du produit vectoriel suivant.

   $$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\quad(\bigstar)$$

   Ces deux vecteurs normaux sont bien parallèles. Les plans sont donc parallèles ou confondus.

   Comme le point $A(3;-1;-2)$ n'est pas sur π (car $2\cdot 3+4\cdot(-1)-(-2)+17=21\neq 0$). Les plans sont bien strictement parallèles.

2. La distance entre les deux plans est donnée par la distance du point A au plan π. Pour cela, on a besoin d'un point sur π ; prenons $P(0;0;17)$.

   $$d(A,\pi)=\frac{\overrightarrow{PA}\bullet\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\frac{\begin{pmatrix}3\\-1\\-19\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{21}}=\frac{21}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}$$

3. Comme le vecteur directeur de d, qui est $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\14\\-3\end{pmatrix}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$, car leur produit scalaire n'est pas nul (il vaut $4+56+3=63$). Il y a bien un point d'intersection S.

   Pour trouver le point S, on substitue les équations paramétriques de d dans l'équation cartésienne de π.

   $$2(10+2t)+4(22+14t)-(-1-3t)+17=0\iff 63t=-20-88-1-17=-126\iff t=-2$$

   Ainsi, on a $S(6;-6;5)$.

4. On regarde l'angle α formé entre le vecteur directeur de d et le vecteur normal de π.

   $$\cos(\alpha)=\frac{\vec{d}\bullet\vec{n}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{n}\|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\14\\-3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{209}\sqrt{21}}=\frac{63}{\sqrt{4389}}\iff\alpha\cong 18.0197^\circ$$

   Ainsi le bon angle vaut $90^\circ-\varphi\cong 71.9803^\circ$.

5. Le volume signé du tétraèdre est donné par

   $$\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AS}\bullet\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overset{(\bigstar)}{=}\frac{1}{6}\cdot 6\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}=-21$$

   Donc le volume du tétraèdre vaut 21.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 316

Résolution de l'exercice 317

1. Les droites sont sécantes ou gauches, car leurs vecteurs directeurs ne sont pas parallèles.

   On calcule un vecteur normal aux deux droites.

$$\vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

   On considère les points respectifs de chaque droite, $P_1(1;0;2)$ et $P_2(4;4;1)$.

   La distance est donnée par

$$d(d_1, d_2) = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

   Cela montre que les droites sont gauches.

2. Le vecteur $\vec{n}$ calculé précédemment est le vecteur directeur de la droite d. Il reste à trouver un point.

   Méthode 1

   Un point de d est à l'intersection du plan π_1, contenant la droite d_1 et au vecteur $\vec{n}$, et de la droite d_2 (schématiquement, on descend une voile de la droite d_1 et on regarde où elle touche la droite d_2).

   Un vecteur normal de π_1 se trouve en faisant le produit vectoriel de ses deux vecteurs directeurs, $\vec{d_1}$ et $\vec{n}$.

$$\vec{d_1} \wedge \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_1$$

   Donc le plan π_1, qui passe par P_1 est donné par $\pi_1 : x - 2y + z = 3$.

   L'intersection avec la droite d_2 donne le point $P_0(5;2;2)$ ($\mu = 1$). Ainsi, on a

$$d : \begin{cases} x &= 5 + t \\ y &= 2 + t \\ z &= 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   Méthode 2

   Un point de d est à l'intersection du plan π_2, contenant la droite d_2 et au vecteur $\vec{n}$, et de la droite d_1 (schématiquement, on descend une voile de la droite d_2 et on regarde où elle touche la droite d_1).

   Un vecteur normal de π_2 se trouve en faisant le produit vectoriel de ses deux vecteurs directeurs, $\vec{d_2}$ et $\vec{n}$.

$$\vec{d_1} \wedge \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_2$$

   Donc le plan π_2, qui passe par P_2 est donné par $\pi_2 : x - z = 3$.

   L'intersection avec la droite d_1 donne le point $P_0'(3;0;0)$ ($\mu = 1$). Ainsi, on a

$$d : \begin{cases} x &= 3 + k \\ y &= 0 + k \\ z &= 0 + k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

   Vérification

   Les deux représentations paramétriques de la droite d associées à chaque méthode sont compatibles, puisque $k = t + 2$ permet de passer d'une représentation à l'autre.

Résolution de l'exercice 318

Stratégie

1. On recherche le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

   On a plusieurs façons de trouver Ω.

   (a) Ω se trouve à l'intersection d'un plan médiateur et d'une médiatrice.

   (b) Ω se trouve à l'intersection de deux médiatrices.

   (c) Ω se trouve à l'intersection de deux plans médiateurs et du plan (ABC).

2. À l'aide de la connaissance du centre Ω, on cherche le rayon du cercle r.

   Le rayon r est la distance de Ω (le centre du cercle) à A (ou B, ou C).

Attention : comme une droite n'est pas décrite par une équation cartésienne (contrairement à un plan), un cercle ne l'est pas non plus (contrairement à la sphère).

Résultats

vecteur directeur de la droite (AB)	vecteur directeur de la droite (AC)	vecteur directeur de la droite (BC)	vecteur normal du plan (ABC)
$\overrightarrow{AB} \parallel \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AC} \parallel \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC} \parallel \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$	$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

point milieu du segment $[AB]$	point milieu du segment $[AC]$	point milieu du segment $[BC]$
$M_{AB}(-2;1;2)$	$M_{AC}(-3;-1;3)$	$M_{BC}(-2;0;2)$

plan	équation	vecteur normal	point
(ABC)	$(ABC) : x + z = 0$	$\vec{n}$	A, B ou C
médiateur $[AB]$	$\pi_{AB} : x + y - z = -3$	$\overrightarrow{AB}$	M_{AB}
médiateur $[AC]$	$\pi_{AC} : y = -1$	$\overrightarrow{AC}$	M_{AC}
médiateur $[BC]$	$\pi_{BC} : x + 2y - z = -4$	$\overrightarrow{BC}$	M_{BC}

droite	représentation	vecteurs normaux	point
médiatrice $[AB]$	$m_{AB} : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$	M_{AB}
médiatrice $[AC]$	$m_{AC} : \begin{cases} x = -3 + \mu \\ y = -1 \\ z = 3 - \mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$	$\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$	M_{AC}
médiatrice $[BC]$	$m_{BC} : \begin{cases} x = -2 + \nu \\ y = - \nu \\ z = 2 - \nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}$	$\overrightarrow{BC}$ et $\vec{n}$	M_{BC}

Réponse : le cercle circonscrit est de centre $\Omega(-1;-1;1)$ et de rayon $r = 3$.

Résolution de l'exercice 319

Stratégie

1. On recherche le centre Ω du cercle inscrit au triangle ABC.

   On a plusieurs façons de trouver Ω.

   (a) Ω se trouve à l'intersection d'un plan bissecteur intérieur et d'une bissectrice intérieure.

   (b) Ω se trouve à l'intersection de deux bissectrices intérieures.

   (c) Ω se trouve à l'intersection de deux plans bissecteurs intérieurs et du plan (ABC).

2. À l'aide de la connaissance du centre Ω, on cherche le rayon du cercle r.

   Le rayon r est la distance de Ω (le centre du cercle) à la droite (AB) (ou (AC), ou (BC)).

Attention : comme une droite n'est pas décrite par une équation cartésienne (contrairement à un plan), un cercle ne l'est pas non plus (contrairement à la sphère).

Résultats

vecteur directeur de la droite (AB)	vecteur directeur de la droite (AC)	vecteur directeur de la droite (BC)	vecteur normal du plan (ABC)
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ de longueur 5	$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ de longueur 6	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ de longueur 5	$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

droite	représentation	vecteur directeur	point
bissectrice intérieure en A	$b_A : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$\widehat{AB} + \widehat{AC}$ ou $6\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$	A
bissectrice intérieure en B	$b_B : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$	$\widehat{BA} + \widehat{BC}$ ou $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$	B
bissectrice intérieure en C	$b_C : \begin{cases} x = -3 + \nu \\ y = -1 + 2\nu \\ z = 2 \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}$	$\widehat{CA} + \widehat{CB}$ ou $5\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{CB}$	C

plan	équation	vecteurs directeurs	point
(ABC)	$(ABC) : z = 2$	$\vec{n}$	A, B ou C
bissecteur intérieur en A	$\pi_A : 2x + y = -1$	$\widehat{AB} + \widehat{AC}$ et $\vec{n}$	A
bissecteur intérieur en B	$\pi_B : y = 2$	$\widehat{BA} + \widehat{BC}$ et $\vec{n}$	B
bissecteur intérieur en C	$\pi_C : 2x - y = -5$	$\widehat{CA} + \widehat{CB}$ et $\vec{n}$	C

Réponse : le cercle inscrit est de centre $\Omega\left(-\frac{3}{2}; 2; 2\right)$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$.

Résolution de l'exercice 320

Stratégie

1. On recherche le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

   Ω se trouve à l'intersection de trois plans médiateurs.

2. À l'aide de la connaissance du centre Ω, on cherche le rayon de la sphère r.

   Le rayon r est la distance de Ω (le centre de la sphère) à A (ou B, ou C, ou D).

Résultats

vecteur directeur de la droite (AB)	vecteur directeur de la droite (AC)	vecteur directeur de la droite (AD)	vecteur directeur de la droite (BC)	vecteur directeur de la droite (BD)	vecteur directeur de la droite (CD)
$\overrightarrow{AB} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AC} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AD} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BD} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

point milieu du segment $[AB]$	point milieu du segment $[AC]$	point milieu du segment $[AD]$	point milieu du segment $[BC]$	point milieu du segment $[BD]$	point milieu du segment $[CD]$
$M_{AB}(-1;4;0)$	$M_{AC}(-3;2;2)$	$M_{AD}(-1;4;3)$	$M_{BC}(-1;1;0)$	$M_{BD}(1;3;1)$	$M_{CD}(-1;1;3)$

plan	équation	vecteur normal	point
médiateur $[AB]$	$\pi_{AB} : -2x + y + 2z = 6$	$\overrightarrow{AB}$	M_{AB}
médiateur $[AC]$	$\pi_{AC} : y = 2$	$\overrightarrow{AC}$	M_{AC}
médiateur $[AD]$	$\pi_{AD} : 2x - y + z = -3$	$\overrightarrow{AD}$	M_{AD}
médiateur $[BC]$	$\pi_{BC} : x + y - z = 0$	$\overrightarrow{BC}$	M_{BC}
médiateur $[BD]$	$\pi_{BD} : z = 1$	$\overrightarrow{BD}$	M_{BD}
médiateur $[CD]$	$\pi_{CD} : 2x + 2y + z = 3$	$\overrightarrow{CD}$	M_{CD}

Calculer l'intersection de trois plans revient à résoudre un système à trois équations (les équations cartésiennes des plans) et à trois inconnues (x, y et z).

Il faut choisir des plans médiateurs des segments contenant les quatre points (A, B, C et D). Si on ne respecte pas ce choix, et qu'on prend, par exemple, les plans π_{AB}, π_{AC} et π_{BC}, leur intersection est la droite orthogonale au triangle ABC et qui passe par Ω. Or on aimerait que l'intersection soit seulement constituée du point Ω.

Réponse : la sphère circonscrite est d'équation $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 14$.

Résolution de l'exercice 321

Stratégie

1. On recherche le centre Ω de la sphère inscrite au tétraèdre $ABCD$.

   Ω se trouve à l'intersection de trois plans bissecteurs intérieurs des arêtes.

2. À l'aide de la connaissance du centre Ω, on cherche le rayon de la sphère r.

   Le rayon r est la distance de Ω (le centre de la sphère) au plan (ABC) (ou (ABD), ou (ACD), ou (BCD)).

Résultats

vecteur normal du plan (ABC)	vecteur normal du plan (ABD)	vecteur normal du plan (ACD)	vecteur normal du plan (BCD)
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} = \vec{n}_{ABC}$ de longueur 24	$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}_{ABD}$ de longueur 15	$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = \vec{n}_{ACD}$ de longueur 30	$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}_{BCD}$ de longueur 15

arête	plan +	vecteur normal	plan −	vecteur normal	le bon plan	
$\boldsymbol{AB}$	$3x+4y+5z=21$	$\widehat{n}_{ABC}+\widehat{n}_{ABD}$	$3x+4y-5z=1$	$\widehat{n}_{ABC}-\widehat{n}_{ABD}$	$\boxed{\pi_{AB} : 3x+4y+5z=21}$	coupe $[CD]$
$\boldsymbol{AC}$	$3x+z=-7$	$\widehat{n}_{ABC}+\widehat{n}_{ACD}$	$x-3z=-9$	$\widehat{n}_{ABC}-\widehat{n}_{ACD}$	$\boxed{\pi_{AC} : x-3z=-9}$	coupe $[BD]$
$\boldsymbol{AD}$	$3x+2y-2z=-3$	$\widehat{n}_{ABD}+\widehat{n}_{ACD}$	$y+z=7$	$\widehat{n}_{ABD}-\widehat{n}_{ACD}$	$\boxed{\pi_{AD} : 3x+2y-2z=-3}$	coupe $[BC]$
$\boldsymbol{BC}$	$3x-4y+5z=5$	$\widehat{n}_{ABC}+\widehat{n}_{BCD}$	$3x-4y-5z=-15$	$\widehat{n}_{ABC}-\widehat{n}_{BCD}$	$\boxed{\pi_{BC} : 3x-4y+5z=5}$	coupe $[AD]$
$\boldsymbol{BD}$	$x=1$	$\widehat{n}_{ABD}+\widehat{n}_{BCD}$	$y=2$	$\widehat{n}_{ABD}-\widehat{n}_{BCD}$	$\boxed{\pi_{BD} : y=2}$	coupe $[AC]$
$\boldsymbol{CD}$	$3x-2y-2z=-11$	$\widehat{n}_{ACD}+\widehat{n}_{BCD}$	$y-z=-3$	$\widehat{n}_{ACD}-\widehat{n}_{BCD}$	$\boxed{\pi_{CD} : 3x-2y-2z=-11}$	coupe $[AB]$

Il faut choisir les plans bissecteurs de manière à de ne pas avoir un sommet du tétraèdre qui soit dans les trois plans dont on calcule l'intersection (qui serait une droite dans ce cas). Ainsi π_{AB}, π_{AC} et π_{BC} est un bon choix ; alors que $\pi_{A\boldsymbol{B}}$, $\pi_{\boldsymbol{B}C}$ et $\pi_{\boldsymbol{B}D}$ n'est pas un bon choix.

Réponse : la sphère inscrite est d'équation $\left(x+\frac{3}{7}\right)^2+(y-2)^2+\left(z-\frac{20}{7}\right)^2=\frac{36}{49}$.

Résolution de l'exercice 322
Préliminaire

Il faut vérifier si la droite coupe la sphère en calculant la distance de la sphère à la droite. En fait on calcule la distance entre le centre C de la sphère et la droite d, notée $\text{dist}(C, d)$, puis on compare la réponse au rayon.

1. $\text{dist}(C, d) < r$.

   Dans ce cas, la droite coupe la sphère en deux points, il n'y a donc pas de plans tangents à la sphère qui contiennent d.

2. $\text{dist}(C, d) = r$.

   Ainsi, la droite d est tangente à la sphère.

   Dans ce cas, on cherche le point d'intersection T entre la droite et la sphère (en insérant les équations paramétriques de la droite dans l'équation cartésienne de la sphère).

   Il y a donc un seul plan qui est tangent à la sphère et qui contient d :
   Ce plan passe par T et a $\overrightarrow{CT}$ comme vecteur normal.

3. $\text{dist}(C, d) > r$.

   Dans ce cas, la droite ne coupe pas la sphère et on a deux plans tangents à la sphère qui contiennent d. On applique la méthode ci-dessous.

Correction (méthode géométrique)

On réalise l'intersection de trois sphères : la sphère Σ et les deux sphères de Thalès, l'une centrée en A, l'autre centrée en B.

1. On établit l'équation de la sphère de Thalès Σ_A associée à A et le centre de la sphère de l'exercice, qui est l'origine.

   On calcule le plan π_A qui contient le cercle d'intersection des sphères Σ et Σ_A

   On trouve $\pi_A : x + 2z = 3$.

2. On établit l'équation de la sphère de Thalès Σ_B associée à B et le centre de la sphère de l'exercice, qui est l'origine.

   On calcule le plan π_B qui contient le cercle d'intersection des sphères Σ et Σ_A.

   On trouve $\pi_B : 3x + 5y + z = 9$

L'intersection des plan π_A et π_B donne la droite d, dont l'intersection avec la sphère Σ donne les points de tangence des plans cherchés : $T_1(3; 0; 0)$ et $T_2(-1; 2; 2)$.

Les plans tangents à Σ qui passent par ces points de tangence sont respectivement

$$\pi_1 : x = 3 \quad \text{et} \quad \pi_2 : x - 2y - 2z = -9$$

plus d'indications

2.29 Géométrie 2D : calcul de distance

✠ Exercice 323 : trop facile pour les contrôles de devoirs

1. Calculer la distance du point $A(4;-2)$ à la droite $d : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

   Correction

   Point de d : $P_0(1;4)$.

   Vecteur directeur de d : $\vec{d} = \binom{2}{-5}$.

   La distance signée est
   $$\delta(d,A) = \frac{\det\left(\overrightarrow{P_0A},\vec{d}\right)}{\|\vec{d}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}}{\sqrt{29}} = \frac{-3}{\sqrt{29}}$$

   Donc la distance vaut $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$.

2. Calculer la distance du point $A(3;5)$ à la droite d'équation $d : 2x - 7y = 14$.

   Correction

   Point de d : $P_0(7;0)$

   Vecteur normal de d : $\vec{n} = \binom{2}{-7}$.

   La distance signée est
   $$\delta(d,A) = \frac{\overrightarrow{P_0A} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-43}{\sqrt{53}}$$

   Donc la distance vaut $d = \dfrac{43}{\sqrt{53}}$.

♡ **Exercice 324 : géométrie 2D - calcul de distance** (2 fois 5 minutes)

1. On considère les droites suivantes.

$$d_1 : 3x - 6y = 9 \qquad \text{et} \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 8\lambda \\ y & = & -5 & + & 4\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites ne sont pas sécantes et calculer la distance qui les sépare.

Correction

Les *vecteurs directeurs* sont parallèles au vecteur $\vec{d} = \binom{2}{1}$
$\Longrightarrow$ les droites sont parallèles ou confondues.

Point de d_1 : $P_1(3; 0)$. *Point de* d_2 : $P_2(2; -5)$.

La distance signée est

$$\delta(d_1, d_2) = \delta(P_1, d_2) = \frac{\det(\overrightarrow{P_2P_1}, \vec{d})}{\|\vec{d_2}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{-9}{\sqrt{5}}$$

Donc la distance vaut $\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

2. On considère les droites suivantes.

$$d_1 : 4x - 10y = 20 \qquad \text{et} \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 11 & + & 15\lambda \\ y & = & -2 & + & 6\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites ne sont pas sécantes et calculer la distance qui les sépare.

Correction

Les *vecteurs directeurs* sont parallèles au vecteur $\vec{d} = \binom{5}{2}$
$\Longrightarrow$ les droites sont parallèles ou confondues.

Point de d_1 : $P_1(5; 0)$. *Point de* d_2 : $P_2(11; -2)$.

La distance signée est

$$\delta(d_1, d_2) = \delta(P_1, d_2) = \frac{\det(\overrightarrow{P_2P_1}, \vec{d})}{\|\vec{d_2}\|} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{29}} = \frac{-22}{\sqrt{29}}$$

Donc la distance vaut $\dfrac{22}{\sqrt{29}}$.

2.30 Géométrie 2D : boîte à outils

Résolution de l'exercice 325

1. On a
$$\widehat{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \widehat{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \qquad \widehat{v}_3 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix} \qquad \widehat{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

2. La formule est
$$\boxed{\widehat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}} \qquad \text{il faut comprendre } \widehat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v}$$

Preuve 1

On pose $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Ainsi

$$\|\widehat{v}\| = \left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v}\right\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{pmatrix}\right\|$$

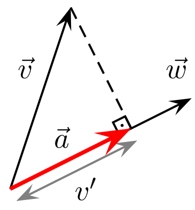
$$= \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}} = 1$$

Preuve 2 (plus générale)

$$\|\widehat{v}\| = \left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v}\right\| \overset{\boxed{\|\lambda\cdot\vec{v}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{v}\|}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\|\vec{v}\| = 1$$

Résolution de l'exercice 326

Le dessin ci-dessous montre que la longueur signée de $\vec{a}$ est donnée par la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{w}$, notée v'.



Ainsi

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \text{«longueur signée de } \vec{a}\text{»} \cdot \text{«un vecteur de longueur 1, de même sens que } \vec{w}\text{»}\\ &= v' \cdot \widehat{w} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|} \cdot \frac{\vec{w}}{\|w\|} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} = \frac{\binom{-3}{2} \bullet \binom{2}{1}}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On trouve $\vec{b}$ en se souvenant que $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$.

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \iff \vec{b} = \vec{v} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{-7}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vérification : les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires car leur produit scalaire donne 0.

Remarque : le dessin ne correspond pas à la situation de l'exercice car le produit scalaire est négatif, ce qui implique que $v' < 0$ et on voit ainsi l'importance de la longueur signée qui permet d'automatiquement faire le changement de sens par rapport à celui de $\vec{w}$.

Résolution de l'exercice 327

Il n'y a pas besoin de calculer le point d'intersection, il suffit de savoir que les droites sont sécantes.

Vecteur directeur de d_1 : $\vec{d_1} = \binom{1}{-1}$; vecteur normal de d_1 : $\vec{n}_1 = \binom{1}{1}$.
Vecteur normal de d_2 : $\vec{n}_2 = \binom{1}{2}$; vecteur directeur de d_2 : $\vec{d_2} = \binom{2}{-1}$.

Comme $\vec{d_1} \nparallel \vec{d_2}$ (ou $\vec{d_1} \not\perp \vec{n}_2$ ou $\vec{n}_1 \not\perp \vec{d_2}$ ou $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$), les droites sont sécantes.

On peut calculer l'angle de trois façons (en 3D, chaque façon correspond à une situation différente).

plus d'indications

Résolution de l'exercice 328

Dans l'ordre les termes sont : $\boxed{\text{sécantes}}$, $\boxed{\text{parallèles}}$, $\boxed{\text{confondues}}$.

Dans l'ordre les termes sont : {le point I}, $\emptyset$, $d_1 = d_2$.

Dans l'ordre les conditions sont : $\vec{d_1} \nparallel \vec{d_2}$, $\vec{d_1} \parallel \vec{d_2}$.

Les stratégies sont les suivantes.

- Lorsque les droites sont sécantes.

  Il y a trois manières de faire, cela dépend si on cherche le point I lorsque les droites sont décrites par des représentations paramétriques, ou par des représentations cartésiennes, ou l'une par une représentation paramétrique et l'autre par une représentation cartésienne.

  Ces trois manières de calculer l'intersection sont présentées dans l'OB27.

- Lorsque les droites sont parallèles ou confondues.

  Le plus simple est de prendre un point d'une droite et de vérifier s'il est sur l'autre. Si c'est le cas, les droites sont confondues ; si ce n'est pas le cas, elles sont parallèles.

Résolution de l'exercice 329

Dans l'ordre les termes sont : $\boxed{\text{disjoints}}$, $\boxed{\text{tangents}}$, $\boxed{\text{sécants}}$.

Dans l'ordre les termes sont : $\emptyset$, $\{$un point$\}$, $\{$deux points$\}$.

Dans l'ordre les conditions sont : $\boxed{d(C,d) > r}$, $\boxed{d(C,d) = r}$ et $\boxed{d(C,d) < r}$.

Résolution de l'exercice 330

a) C'est un cercle centré en $\Omega(-3;4)$ et de rayon 3.

b) Il s'agit de l'ensemble vide.

c) C'est un cercle centré en $\Omega(\frac{9}{4};-1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{161}}{4}$.

Résolution de l'exercice 331

La distance entre le centre du cercle $\Omega(-3;5)$ et la droite d est plus petite que le rayon du cercle qui vaut 6 (la distance entre le centre et la droite vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$), donc la distance entre le cercle et la droite est nulle !

Si la distance d entre le centre et la droite était plus grande que le rayon r, alors la distance entre le cercle et la droite vaudrait $d-r$.

Résolution de l'exercice 332

1. Une représentation cartésienne de la droite est $d : 3x - y = 2$.
   L'équation du cercle est $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

   Pour calculer l'intersection, on substitue $y = 3x - 2$ dans l'équation du cercle, on obtient une équation équivalente à $5x^2 - 11x + 2 = 0$. Grâce à Viète, on trouve les abscisses $x = 2$ et $x = \frac{1}{5}$ des points d'intersection. On utilise encore une fois $y = 3x - 2$ pour trouver les ordonnées des points d'intersection.

2. Une représentation paramétrique de la droite est $d : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & \lambda \\ y & = & 1 & + & 3\lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}$.
   L'équation du cercle est $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

   Pour calculer l'intersection, on substitue les équations de la représentation paramétrique dans l'équation du cercle, on obtient une équation équivalente à $5\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$. Grâce à Viète, on trouve les solutions $\lambda = 1$ et $\lambda = -\frac{4}{5}$. On utilise ces valeurs dans la représentation paramétrique de d pour trouver les coordonnées des points d'intersection.

Les points d'intersection sont $B(2; 4)$ et $I(\frac{1}{5}; -\frac{7}{5})$.
Coïncidence : le point B est un des deux points d'intersection.

Résolution de l'exercice 333

Condition sur $P(x;y)$: $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$.

$$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP} \iff \overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=0 \iff \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\end{pmatrix}=0$$

$$\iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

$$\iff x^2-(x_A+x_B)x+x_Ax_B+y^2-(y_A+y_B)y+y_Ay_B=0$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2-\frac{(x_A+x_B)^2}{4}+x_Ax_B+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-\frac{(y_A+y_B)^2}{4}+y_Ay_B=0$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B+(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}{4}$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}$$

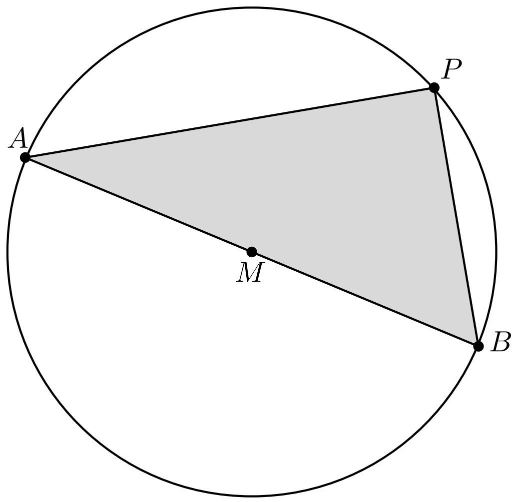
$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\left(\frac{x_A-x_B}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A-y_B}{2}\right)^2$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\left\|\begin{pmatrix}\frac{x_A-x_B}{2}\\\frac{y_A-y_B}{2}\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$\iff \left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=\left\|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$\iff (x-x_M)^2+(y-y_M)^2=\left(\tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\right)^2$$

C'est l'équation du cercle de centre $M(x_M;y_M)=\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ et dont le rayon est la moitié de la longueur du segment $[AB]$. C'est le cercle de Thalès !



2.31 Géométrie 2D : problèmes de géométrie

Résolution de l'exercice 334

1. Vecteur normal de π : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Vecteur directeur de (AB) : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ -16 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{d}$

   Ces vecteurs sont perpendiculaire car $\vec{n} \bullet \vec{d} = 20 - 20 = 0$
   Cela montre que π et (AB) sont parallèles ou confondues

   Le point $A \notin \pi$, car $4 \cdot 27 - 5 \cdot 31 = 108 - 155 \neq 76$
   Donc π et (AB) sont parallèles (strictement)

2. La distance signée est

   $$d(\pi,(AB)) = d(\pi, A) \underset{\substack{\uparrow \\ P_0(19;0)\in\pi}}{=} \frac{\vec{P_0A} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -31 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\sqrt{41}} = -\frac{123}{\sqrt{41}}$$

   La distance vaut $\dfrac{123}{\sqrt{41}} = \dfrac{123\sqrt{41}}{41} = 3\sqrt{41}$

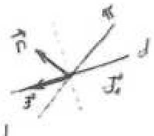
3. On substitue les équations paramétriques de d dans l'équation cartésienne de π :

   $$4(11 + 17\lambda) + 5(24 + 4\lambda) = 76 \iff 88\lambda = -88 \iff \lambda = -1$$

   Ainsi $S(-6\,;\,20)$.

4. On a $$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \bullet \vec{d_1}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d_1}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \overbrace{\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}}^{\text{vecteur directeur de } d}}{\sqrt{41}\sqrt{305}} = \frac{88}{\sqrt{41}\sqrt{305}} \Rightarrow \alpha \cong 38.100^\circ$$

   Donc l'angle vaut $90^\circ - \alpha \cong 51.900^\circ$



5. L'aire signée vaut $\frac{1}{2}\det(\vec{AB}, \vec{AS}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 20 & -33 \\ -16 & 51 \end{vmatrix} = 246$

6. On calcule la projection orthogonale de A sur la droite π

   Droite passant par A, orthogonale à π : $\begin{cases} x = 27 + 4\mu \\ y = -31 + 5\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$

   On calcule l'intersection $4(27 + 4\mu) + 5(-31 + 5\mu) = 76 \iff 41\lambda = 123$
   $\iff \lambda = 3$

plus d'indications

Résolution de l'exercice 335

1. Vecteur directeur $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{d} \Rightarrow$ Vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

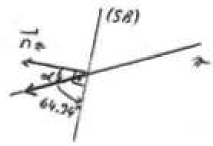
   Donc $(AB) : x - 2y = -23$ (vérifié avec $A(-5;9)$ et $B(13;18)$)

2. $\vec{SB} = \begin{pmatrix} 22 \\ 31 \end{pmatrix}$, vecteur normal de π : $\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \vec{n}_\pi$

   L'angle α entre ces 2 vecteurs satisfait

   $$\cos(\alpha) = \frac{\vec{SB} \cdot \vec{n}_\pi}{\|\vec{SB}\| \cdot \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{44 + 341}{\sqrt{1445}\sqrt{125}} = \frac{385}{\sqrt{1445 \cdot 125}} \Longrightarrow \alpha \cong 25.06°$$

   Donc l'angle cherché vaut $90° - \alpha \cong 64.94°$



3. $\vec{d} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\pi \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$

   Le même vecteur est directeur à d et normal à π, donc d est bien perpendiculaire à π

4. Même si on peut vérifier que la projection orthogonale de S sur la droite π est bien le point A par calcul (cf objectif de base), on peut simplement vérifier que

   1) $\vec{AS} \perp \pi$ et 2) $A \in \pi$

   Pour 1) : $\vec{AS} = \begin{pmatrix} -4 \\ -22 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \vec{n}_\pi \perp \pi$!

   Pour 2) : $A(-5;9) \in \pi$ car $2 \cdot (-5) + 11 \cdot 9 = 89$!

5. C'est le cas si $d(\Omega, (AB)) = d(\Omega, \pi)$!

   $$\delta(\Omega, (AB)) \overset{\vec{d}/\!/(AB)}{=} \frac{\det(\vec{\Omega A}, \vec{d})}{\|\vec{d}\|} = \frac{\begin{vmatrix} -42 & 2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{-30}{\sqrt{5}} = -6\sqrt{5}$$

   $$\delta(\Omega, \pi) \overset{A \in \pi}{=} \frac{\vec{\Omega A} \cdot \vec{n}_\pi}{\|\vec{n}_\pi\|} = \frac{\begin{pmatrix} -42 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}}{\sqrt{125}} = \frac{-150}{5\sqrt{5}} = -6\sqrt{5}$$

   Les deux distances valent $6\sqrt{5}$ et l'équation du cercle est

   $$(x - 37)^2 + (y - 15)^2 = 180$$

plus d'indications

Résolution de l'exercice 336

1. $(AB) : 8x - y = 442$.
2. Facile ! Mais il faut bien régider le raisonnement.
3. L'angle aigu vaut environ $36.87°$.
4. $I(13; 52)$.
5. $d : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 15 & + & 8\lambda \\ y & = & 68 & - & \lambda \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{R}$.
6. Ce sont les points $(\frac{29}{3}; \frac{206}{3})$ et $A(63; 62)$.
7. $\Sigma : (x - 63)^2 + (y - 62)^2 = 2340$.

Résolution de l'exercice 337

1. L'équation du cercle est $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.
2. L'équation du cercle est $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

Méthodes : pour 1, le centre est le milieu du segment $[AB]$; pour 2, le centre est sur la médiatrice sur segment $[AB]$ (et aussi sur la droite d'équation $3x-y-2=0$).

Résolution de l'exercice 338

Les droites sont d'équations cartésiennes $2x+y=1$ et $2x+y=-19$.

Méthodes : le vecteur directeur des droites cherchées est celui de la droite d ; il suffit de trouver un point sur chaque droite. Deux méthodes sont possibles.

1. Utiliser un vecteur $\widehat{v}$ bien choisi.
2. Calculer les intersections du cercle avec la droite orthogonale à d passant par le centre du cercle.

Résolution de l'exercice 339

1. Périmètre $= \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| = \left\|\binom{4}{6}\right\| + \left\|\binom{4}{-4}\right\| + \left\|\binom{-8}{-2}\right\| = \sqrt{52} + \sqrt{32} + \sqrt{68} \cong 21.114$.
   L'angle au sommet A est $\alpha \cong 42.274°$ car :
   $$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\binom{4}{6} \bullet \binom{8}{2}}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{68}} = \frac{44}{\sqrt{3536}} \iff \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{44}{\sqrt{3536}}\right)$$
   L'angle au sommet B est $\beta \cong 78.690°$ car :
   $$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\binom{-4}{-6} \bullet \binom{4}{-4}}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{32}} = \frac{8}{\sqrt{1664}} \iff \beta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{1664}}\right)$$
   Ainsi, l'angle au sommet C est $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \cong 59.036°$.
   Aire signée $= \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-40) = -20$. Donc, l'aire vaut 20.

2. La médiane issue de $C(6;-2)$, passe par C et le point milieu du segment AB qui est $M(0;-1)$. Son vecteur directeur est ainsi $\overrightarrow{CM} = \binom{-6}{1}$. Son vecteur normal est $\binom{1}{6}$ et son équation cartésienne est
   $$x + 6y = -6$$

3. On utilise $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$.

4. (a) Recherche de la médiatrice du segment AB.
   Cette droite, notée m_1 est de vecteur normal $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} = \binom{4}{6} \parallel \binom{2}{3}$ et passe par $M_1(0;-1)$, son équation cartésienne est donc
   $$m_1 : 2x + 3y = -3$$
   (b) Recherche de la médiatrice du segment AC.
   Cette droite, notée m_2 est de vecteur normal $\vec{n}_2 = \overrightarrow{AC} = \binom{8}{2} \parallel \binom{4}{1}$ et passe par $M_2(2;-3)$, son équation cartésienne est donc
   $$m_2 : 4x + y = 5$$
   (c) Recherche de l'intersection : on résout le système
   $$\begin{cases} (x;y) \in m_1 \\ (x;y) \in m_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 4x + \ \ y = \ \ 5 \end{cases} \overset{①-3\cdot②}{\iff} \begin{cases} -10x = \ \ -18 \\ \qquad y = 5 - 4x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = -\frac{11}{5} \end{cases}$$
   On a trouvé le centre du cercle $I\left(\frac{9}{5}; -\frac{11}{5}\right)$.
   Pour le rayon, on calcule $\|\overrightarrow{IA}\| = \left\|\begin{pmatrix} -\frac{19}{5} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{442}{25}}$.
   L'équation du cercle circonscrit est $\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}$.

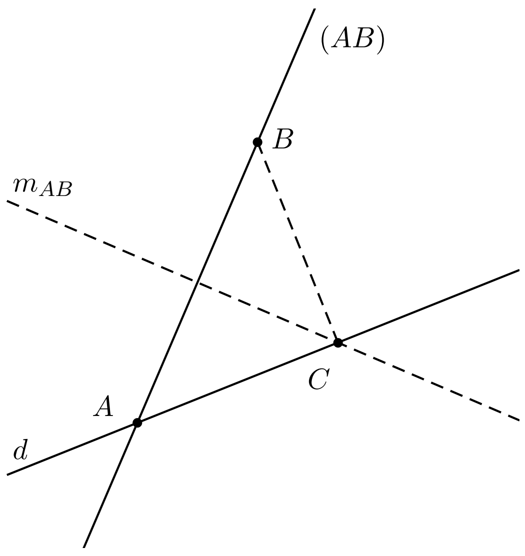
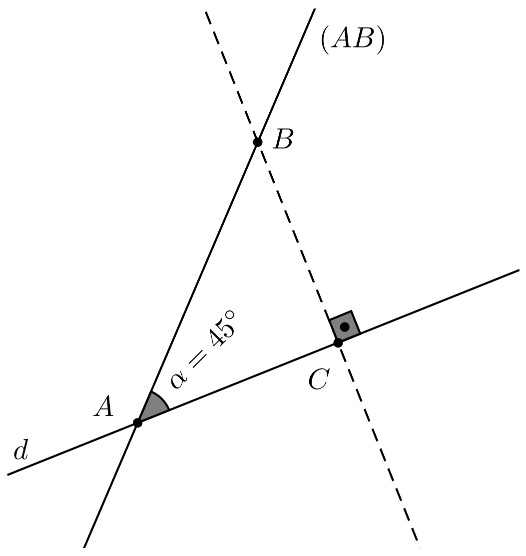
Résolution de l'exercice 340

1. On cherche d'abord l'angle α entre les vecteurs directeurs des droites $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{d} = \binom{5}{-7}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{d}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\vec{d}\|} = \frac{\binom{10}{60} \bullet \binom{5}{-7}}{\sqrt{3700} \cdot \sqrt{74}} = \frac{-370}{10\sqrt{37}\sqrt{37}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \iff \alpha = 135°$$

Ainsi l'angle aigu entre les deux droites vaut $180° - \alpha = 45°$.

2. *Schémas pour la réflexion*

Première méthode	Deuxième méthode Il est important de remarquer que (a) A est à l'intersection des droites (AB) et d, car il correspond à $\lambda = 8$. (b) l'angle aigu entre les deux droites (AB) et d vaut $45°$.
	
C est à l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la droite d.	C est la projection orthogonale de B sur la droite d. Cette méthode n'est valable que parce que les angles du triangle isocèle sont $45°$ (2 fois) et $90°$.

Il y a (au moins) 3 méthodes pour résoudre ce problème.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 341

- On veut que l'aire signée du triangle ABC vaille ± 111.
- Le point C est l'inconnue, nommons-la $C(x;y)$.
- L'aire signée est la moitié du déterminant, donc il faut résoudre

$$\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm 111 \overset{C(x;y)}{\iff} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 13 & x-17 \\ -7 & y-31 \end{vmatrix} = \pm 111$$

Il faut encore utiliser le fait que $C(x;y)$ est sur la droite d, donc que la relation $x = 116 - 11y$ est satisfaite (on déduit cette relation de l'équation cartésienne $d : x + 11y = 116$).

On finit par trouver que $y = 8$ (pour une aire signée de $+111$) ou $\frac{17}{16}$ (pour une aire signée de -111).

La consigne nous dit que la solution qui nous intéresse correspond à $y = 8$ seulement.

Donc, on a la solution $C(28;8)$.

Résolution de l'exercice 342

- On fait un petit schéma en respectant bien l'ordre des lettres.
- On voit au moins trois méthodes émerger : la première, géométrique, utilise le cercle de Thalès ; la deuxième, analytique, le produit scalaire ; la troisième, analytique, consiste à vérifier la relation de Pythagore (donc utiliser la norme).

  (a) **Méthode géométrique**

  Le cercle de Thalès est d'équation $(x+16)^2+(y-25)^2 = 225$ (car le cercle est centré au milieu de $[AC]$ et dont le diamètre est $\|\overrightarrow{AC}\|$).

  Pour trouver l'intersection entre le cercle et la droite d, il suffit d'écrire les équations paramétriques de la droite d et de les substituer dans l'équation du cercle. Le créateur de l'exercice s'est arrangé pour qu'il y ait exactement un point d'intersection, il aurait pu y en avoir deux (ou aucun)).

  (b) **Méthode analytique**

  On veut que l'angle $\widehat{ABC}$ soit droit, ce qui est équivalent à dire que $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB}$. Le point B est l'inconnue, nommons-la $B(x;y)$. En utilisant la propriété essentielle du produit scalaire, il faut résoudre

  $$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CB} = 0 \overset{B(x;y)}{\iff} \begin{pmatrix} x+25 \\ y-13 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x+7 \\ y-37 \end{pmatrix} = 0$$

  Pour résoudre cette équation, il suffit d'écrire les équations paramétriques de la droite d et de les substituer dans l'équation ci-dessus.

  (c) **Méthode analytique** (plus longue)

  On veut que l'angle $\widehat{ABC}$ soit droit, ce qui, par Pythagore, est équivalent à dire que

  $$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

  Le point B est l'inconnue, nommons-la $B(x;y)$. Cela permet d'écrire les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ (comme à la méthode précédente). On substitue les équations paramétrique de la droite d dans l'équation de Pythagore et on développe l'équation obtenue (il est pratique d'avoir les normes au carré, car cela simplifie les racines carrées qui apparaissent quand on calcule une norme).

  Quelle que soit la méthode choisie ci-dessus, on obtient ainsi une équation du deuxième degré dont la variable est le paramètre de la droite d, nommons ce paramètre λ. L'équation est équivalente à $\lambda^2+10\lambda+25 = 0$.

  Cette équation du deuxième degré en λ se résout grâce à une identité remarquable (celui qui essaie de la résoudre avec Viète y arrivera en passant par un discriminant nul). On trouve $\lambda = -5$ et donc la solution $B(-4;34)$.

- Pour trouver le point D, il suffit de regarder le dessin pour trouver une stratégie. Par exemple, on peut simplement utiliser une relation de vecteurs.

  $$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$

  On trouve $D(-28;16)$.

Résolution de l'exercice 343

Le cercle est centré en $\Omega(-2;3)$ et est de rayon $r=5$.

1. Car la distance entre les points P_1 et Ω est plus petite que le rayon, donc le point est à l'intérieur du cercle et il ne peut pas y avoir de tangentes.
2. Le point P_2 est sur le cercle, il n'y a donc qu'une seule tangente qui est $t : 3x-4y=-43$.
3. Le point P_3 est à l'extérieur du cercle, il y a donc deux tangentes. Pour les trouver, il y a au moins deux méthodes.
   (a) On peut se souvenir qu'une droite non verticale s'écrit $t : y = mx+h$ (la représentation cartésienne $ax+by=c$ n'est pas la bienvenue car les trois inconnues sont liées (cela signifie que si $a=3$, $b=-4$ et $c=-43$ sont trois solutions, alors $a=6$, $b=-8$ et $c=-86$ aussi. Pire, il y en a même une infinité)).
   On peut trouver m et h en résolvant le système d'équations suivant.
   $$\begin{cases} P_3 \in t \\ d(\Omega,t)=r \end{cases} \iff \begin{cases} 2=5m+h \\ \dfrac{\det\left(\overrightarrow{P_3\Omega}, \binom{1}{m}\right)}{\left\|\binom{1}{m}\right\|} = \pm 5 \end{cases} \iff \begin{cases} h = 2-5m \\ \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = \pm 5\sqrt{1+m^2} \end{cases}$$
   On résout la deuxième équation qui, après avoir élevé au carré de chaque côté (sans aucun risque d'ajouter de solution grâce au $\pm$ qui disparait après l'élévation au carré), est équivalente à $12m^2+7m-12=0$ et qui donne les solutions $m=\frac{3}{4}$ et $m=-\frac{4}{3}$.
   Les tangentes sont d'équations $t_1 : y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ et $t_1 : y = -\frac{4}{3}x+\frac{26}{3}$.
   (b) On veut trouver deux points T sur le cercle $\mathcal{C}$ qui satisfont $\overrightarrow{\Omega T} \perp \overrightarrow{P_3T}$. C'est équivalent à dire que le triangle ΩTP_3 est rectangle en T. Ainsi, le point T est aussi sur le cercle de Thalès (dont le centre est le milieu du segment $[P_3\Omega]$ et le diamètre est la longueur du même segment) d'équation $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{2}$.
   Les points T sont à l'intersection de deux cercles.
   $$\begin{cases} x^2+y^2+4x-6y=12 \\ x^2+y^2-3x-5y=4 \end{cases} \overset{①-②}{\iff} \begin{cases} 7x-y=8 \\ x^2+y^2-3x-5y=4 \end{cases}$$
   On est donc ramené à l'intersection entre une droite d'équation $7x-y=8$ et le cercle de Thalès (on aurait pu s'arranger pour que ce soit l'autre cercle). On trouve ainsi $T_1(2;6)$ et $T_2(1;-1)$. On peut donc construire les équations des tangentes (la première tangente passe par P_3 et T_1, la deuxième par P_3 et T_2).

   On a les tangentes $t_1 : 4x+3y=26$ et $t_2 : 3x-4y=7$.
4. Le point P_4 est à l'extérieur du cercle, il y a donc deux tangentes.
   (a) On ne trouve qu'une valeur de m qui est $m=\frac{-8}{15}$ et $h=-\frac{56}{15}$. Cela signifie qu'une tangente est verticale (il est très facile de la trouver).
   (b) Les points d'intersection sont $T_1(-\frac{74}{17};-\frac{24}{17})$ et $T_2(-7;3)$.

   On a les tangentes $t_1 : 8x+15y=-56$ et $t_2 : x=-7$ (c'est une droite verticale).

Résolution de l'exercice 344

Stratégie

1. On recherche le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

   Ω se trouve à l'intersection de deux médiatrices.

2. À l'aide de la connaissance du centre Ω, on cherche le rayon du cercle r.

   Le rayon r est la distance de Ω (le centre du cercle) à A (ou B, ou C).

Résultats

vecteur directeur de la droite (AB)	vecteur directeur de la droite (AC)	vecteur directeur de la droite (BC)
$\overrightarrow{AB} \parallel \binom{4}{-3}$	$\overrightarrow{AC} \parallel \binom{0}{1}$	$\overrightarrow{BC} \parallel \binom{4}{3}$

point milieu du segment $[AB]$	point milieu du segment $[AC]$	point milieu du segment $[BC]$
$M_{AB}(-1; \frac{7}{2})$	$M_{AC}(-3; 2)$	$M_{BC}(-1; \frac{1}{2})$

droite	équation	vecteur normal	point
médiatrice $[AB]$	$m_{AB} : 4x - 3y = -\frac{29}{2}$	$\overrightarrow{AB}$	M_{AB}
médiatrice $[AC]$	$m_{AC} : y = 2$	$\overrightarrow{AC}$	M_{AC}
médiatrice $[BC]$	$m_{BC} : 4x + 3y = -\frac{5}{2}$	$\overrightarrow{BC}$	M_{BC}

Réponse : l'équation du cercle circonscrit est donc : $\left(x + \frac{17}{8}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{625}{64}$.

Résolution de l'exercice 345

Stratégie

1. On recherche le centre Ω du cercle inscrit au triangle ABC.

   Ω se trouve à l'intersection de deux bissectrices intérieures.

2. À l'aide de la connaissance du centre Ω, on cherche le rayon du cercle r.

   Le rayon r est la distance de Ω (le centre du cercle) à la droite (AB) (ou (AC), ou (BC)).

Résultats

vecteur directeur de la droite (AB)	vecteur directeur de la droite (AC)	vecteur directeur de la droite (BC)
$\overrightarrow{AB} = \binom{4}{-3}$ de longueur 5	$\overrightarrow{AC} = \binom{0}{-6}$ de longueur 6	$\overrightarrow{BC} = \binom{-4}{-3}$ de longueur 5

droite	représentation	vecteur directeur	point
bissectrice intérieure en A	$b_A : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$\widehat{AB} + \widehat{AC}$ ou $6\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$	A
bissectrice intérieure en B	$b_B : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$	$\widehat{BA} + \widehat{BC}$ ou $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$	B
bissectrice intérieure en C	$b_C : \begin{cases} x = -3 + \nu \\ y = -1 + 2\nu \end{cases}, \nu \in \mathbb{R}$	$\widehat{CA} + \widehat{CB}$ ou $5\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{CB}$	C

Réponse : l'équation du cercle inscrit est donc : $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{4}$.

Résolution de l'exercice 346

Si deux équations cartésiennes décrivent la même droite, alors elles sont multiples l'une de l'autre (par un nombre non nul). Et réciproquement.

«$\Longrightarrow$» Soit $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ deux équations de la même droite.
Alors les vecteurs normaux associés à chaque droite sont respectivement

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

Comme ce sont des vecteurs normaux de la même droite, ils sont forcément parallèles. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tel que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a' \\ \lambda \cdot b' \end{pmatrix}$$

Donc l'équation $ax+by=c$ s'écrit

$$\lambda a'x + \lambda b'y = c \iff \lambda \cdot (\overbrace{a'x+b'y}^{=c'}) = c \iff \lambda \cdot c' = c$$

Ainsi l'équation $ax+by=c$ s'obtient en multipliant l'équation $a'x+b'y=c'$ par λ.

«$\Longleftarrow$» Soit deux droites d_1 et d_2 dont les équations cartésiennes sont multiples l'une de l'autre. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tel que les équations cartésiennes de d_1 et de d_2 sont

$$d_1 : ax+by=c \quad \text{et} \quad d_2 : \lambda ax + \lambda by = \lambda c$$

Les équations $ax+by=c$ et $\lambda ax+\lambda by=\lambda c$ sont équivalentes. Elles ont donc le même ensemble de solutions. L'ensemble de solutions de $ax+by=c$ est la droite d_1. L'ensemble de solutions de $\lambda ax+\lambda by=\lambda c$ est la droite d_2.

Ces ensembles étant les mêmes, on peut ainsi affirmer que $d_1=d_2$.

Complément de l'exercice 200

Voici comment procéder pour faire le point 2.

OB20
Dérivée
calcul à l'aide des règles

La dérivée de la fonction f se factorise ainsi

$$f'(x) = \frac{6x^2\left(x^3-2\right)\left(x^6-7x^3+6\right)}{\left(x^3-3\right)^3}$$

OB6
Factorisations
polynôme de degré 2
résolution d'équations

Les zéros du polynôme de degré 2 en x^3 se trouvent ainsi

$$\Delta = 49-24=25 \implies x^3 = \frac{7\pm\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{7\pm 5}{2} = 6 \text{ ou } 1$$

On a donc la factorisation $(x^3)^2 - 7(x^3) + 6 = (x^3-1)(x^3-6)$.

Par conséquent

$$f'(x) = \frac{6x^2\left(x^3-2\right)\left(x^3-1\right)\left(x^3-6\right)}{\left(x^3-3\right)^3}$$

OB11
Fonctions
résolution d'inéquations

Le tableau de signes est

	0		1		$\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{3}$		$\sqrt[3]{6}$	
$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$	0	$+$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 214

1. On utilise les compétences développées dans

   OB10 **Fonctions** points d'intersection de deux courbes

   On voit sur le graphe du logarithme naturel que $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et que $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ pour autant que a et b sont positifs.

2. On voit sur le graphe du logarithme naturel que $\ln(x)$ a une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. On utilise les compétences développées dans

   OB20 **Dérivée** calcul à l'aide des règles

   Il faut annuler la dérivée qui vaut $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. On voit sur la donnée qu'il s'agit d'un minimum.

4. On utilise les compétences développées dans

   OB20 **Dérivée** calcul à l'aide des règles

   Les points d'inflexion se trouvent là où la dérivée seconde s'annule et change de signe.
   La dérivée seconde est $f''(x) = \dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

5. On utilise les compétences développées dans

   OB19 **Dérivée** équation d'une tangente

6. On résout l'équation $f'(x) = \frac{1}{2}$ et pour cela on utilise les compétences développées dans

   OB6 **Factorisations** polynôme de degré 2 résolution d'équations

7. On cherche l'angle entre les deux vecteurs directeurs des tangentes à chacune des fonctions en $x = 3$ (la première coordonnée du point C).
   Rappelons que les vecteurs directeurs respectifs sont $\binom{1}{f'(3)}$ et $\binom{1}{g'(3)}$, et que l'on sait calculer un angle entre deux vecteurs grâce à

   OB28 **Géométrie 2D** périmètre, aire et angle

   Rappelons que l'angle cherché doit être aigu.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 215

A. g) La fonction à optimiser est $A(x) = \frac{1}{2}\text{base} \cdot \text{hauteur} = \frac{1}{2}\big(f(x) - g(x)\big) \cdot \big(x - \frac{1}{2}\big)$.

On remarque que, puisque chaque parenthèse est l'opposé de ce qu'on avait au point précédent, la fonction à optimiser est exactement la même. Tous les calculs ont déjà été faits. Seul le domaine d'intérêt change, c'est maintenant $\big[\frac{1}{2}, +\infty\big[$.

Le tableau de variation de cette fonction est

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	
$A'(x)$	0	$+$	0	$-$
comportement de A	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$

Le maximum de l'aire se trouve en $x = \frac{5}{2}$ et l'aire vaut $A(\frac{5}{2}) = 4e^{-\frac{5}{2}} \cong 0.328$.

B. a) Il faut trouver les valeurs de x de sorte que $\frac{2x-1}{3x-2} > 0$, soit en faisant un tableau de signe (OB11), soit en dessinant le graphe de cette homographie (OB9).

On trouve $D = \big]-\infty, \frac{1}{2}\big[\cup \big]\frac{2}{3}, \infty\big[$ qui s'écrit aussi $D = \mathbb{R} \setminus \big[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\big]$.

b) On résout $h'(x) = -1$, car la pente de la droite $y = -x + 5$ vaut -1 (c'est la dérivée de $-x + 5$).

$$h'(x) = -1 \iff \ldots \iff 6x^2 - 7x + 1 = 0$$

Il y a deux tangentes car le discriminant de $6x^2 - 7x + 1$ est positif. Il n'y a pas besoin de trouver les deux solutions qui sont 1 et $\frac{1}{6}$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 216

B. (a) On a

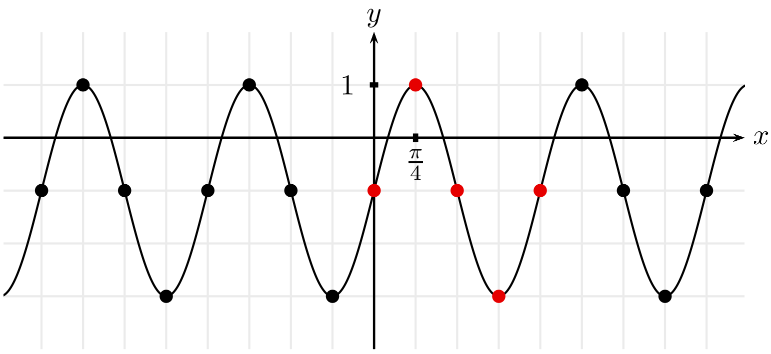
$$h(-x) = \sin^2\big(2\cdot(-x)\big) = \sin^2\big(-2x\big) = \sin^2\big(2x\big) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

car $\sin(-2x) = -\sin(2x)$ et que le sinus est élevé au carré (et $(-1)^2 = 1$).
Donc h est paire.

On remarque que u s'annule lorsque $\sin(2x) = \frac{1}{2}$. Donc $x = \frac{\pi}{12}$ est un zéro (car $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$).
Or, en $x = -\frac{\pi}{12}$, $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$, donc u ne s'annule pas pour cette valeur de x, car $u(-\frac{\pi}{12}) = -2$.

Donc l'ensemble des zéros a un défaut de symétrie et u n'est ni paire, ni impaire.
On aurait aussi pu simplement calculer $u(1) \cong 0.819$ et $u(-1) \cong -2.819$ (en radians) et constater que ces nombres ne sont ni égaux, ni opposés.

(b) On dessine le graphe (une fois que les points rouges sont posés, la périodicité permet de finir le graphe rapidement).



(c) On résout.

$$\sin^2(2x) = 2\sin(2x) - 1 \iff \sin^2(2x) - 2\sin(2x) + 1 = 0$$

C'est une identité remarquable (ou on utilise la formule de Viète, le discriminant est nul).

$$\sin^2(2x) = 2\sin(2x) - 1 \iff \big(\sin(2x) - 1\big)^2 = 0 \iff \sin(2x) = 1$$

En dessinant un cercle trigonométrique, l'angle $2x$ correspond au point tout en haut du cercle (son ordonnée, le sinus, vaut 1). Ainsi

$$\sin^2(2x) = 2\sin(2x) - 1 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ensemble de solutions : $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(d) La limite vaut $\frac{4}{3}$. On a deux méthodes :

i. On utilise la règle de l'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{3x^2} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{\text{Hosp.}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)\cos(2x)}{6x} \underset{(\frac{0}{0})}{\overset{\text{Hosp.}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{8\cos^2(2x) - 8\sin^2(2x)}{6} = \frac{4}{3}$$

ii. On utilise le fait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (on insistera sur ce fait à la fin de l'année).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{3}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{4}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1} = \frac{4}{3}$$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 217

5. L'aire vaut $A(x) = \frac{1}{2}xg(x) = \frac{1}{2}(3x - x^2)e^x$.

   On doit maximiser $A(x)$ sur le domaine d'intérêt $]0, 3[$.

   On a
$$A'(x) = \tfrac{1}{2}\big((3-2x)e^x + (3x-x^2)e^x\big) = -\tfrac{1}{2}(x^2 - x - 3)e^x$$
$$\overset{\Delta=1+12=13}{=} -\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \tfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)e^x$$

   Le seul zéro de $A'(x)$ sur le domaine d'intérêt est $\frac{1+\sqrt{13}}{2} \cong 2.303$.

   Voici le tableau de variation.

x	0		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$		3
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
comportement de A		↗	⌒	↘	

   Ainsi, l'aire du triangle est maximale pour le point $P\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; g\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\right) \cong (2.303; 6.974)$.

6. La distance est donnée par $d(x) = \sqrt{x^2 + (-x^2 + 2x + 1)^2}$, avec $x \in [-1, 3]$.

   Selon la manière de réfléchir, on peut avoir des signes opposés sous les carrés.

   On cherche à faire le tableau de signe de la dérivée, il n'y a pas besoin de factoriser la fonction $d(x)$, donc il ne sert à rien de distribuer pour factoriser ce qu'il y a sous la racine (en plus, le créateur de l'exercice n'a pas fait exprès que Gauss et Horner fonctionnent, donc on ne peut pas factoriser le polynôme de degré 4 qu'on obtient après un long calcul (on trouve $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x + 1$), et on n'en a pas besoin).

   Pour la dérivée, dans les calculs, on arrive au polynôme de degré 3 qui est $2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ que l'on peut factoriser par Gauss et Horner.
$$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (-x^2 + 2x + 1)^2}}(2x^2 - 2x - 1)(x - 2)$$

   La dérivée s'annule et change de signe en 2 et $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

x	-1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		2		3
$d'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
comportement de d	↘	↘	◡	↗	⌒	↘	◡	↗	↗

   Pour le minimum, sont en concurrence : $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x = 2$.
   Le minimum est réalisé pour $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, car en ce x, la distance vaut environ 0.3898.

   Pour le maximum, sont en concurrence : $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x = -1$ et $x = 3$.
   Le maximum est réalisé pour $x = 3$, car en ce x, la distance vaut environ 3.6056.

   Remarque amusante, pour le maximum local en $x = -1$ la distance est la même que pour le minimum local en $x = 2$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 218

2. (e) Comme dans l'exercice outil intitulé «tangentes à un point quelconque», on trouve une équation en x_0 à résoudre

$$1 = f(x_0) + f'(x_0)(\tfrac{11}{40} - x_0) \iff 1 = (x_0^2+1)^2 + 4x_0(x_0^2+1)(\tfrac{11}{40} - x_0)$$

On peut faire comme on veut, mais pour que cela soit assez joli, on peut multiplier par 10 avant ou après avoir distribué, on passe tout du même côté (peu importe de quel côté), on arrive à une équation équivalente à

$$30x_0^4 - 11x_0^3 + 20x_0^2 - 11x_0 = 0 \overset{x_0 \text{ en évidence}}{\iff} x_0\,(30x_0^3 - 11x_0^2 + 20x_0 - 11) = 0$$

Pour factoriser le polynôme de degré 3, soit on devine une factorisation, soit on devine un zéro. Si on ne peut pas, on utilise le lemme de Gauss, puis le schéma de Horner, puis la formule de Viète.

Dans la liste des éventuels zéros rationnels donnée par Gauss, il y a toujours ± 1, on essaye de voir si le polynôme de degré 3 s'annule pour ± 1 : c'est raté. On continue, pour le numérateur, c'est soit 1, soit 11 ; pour le dénominateur, c'est un diviseur de 30 : il y en a huit ! On prend son courage à deux mains : essayons $\frac{1}{2}$. Le moyen le plus simple pour faire cette évaluation, c'est d'utiliser le schéma de Horner.

30	-11	20	-11	$\frac{1}{2}$
0	15	2	11	
30	4	22	$\boxed{0}$	

Ca marche et on peut factoriser. L'équation devient donc

$$x_0(x_0 - \tfrac{1}{2})(30x_0^2 + 4x_0 + 22) = 0$$

Le discriminant du polynôme de degré 2 étant négatif (il vaut $16 - 4 \cdot 30 \cdot 22$; on voit que ce nombre est négatif sans faire le calcul), les seules solutions sont $x_0 = 0$ et $x_0 = \frac{1}{2}$.

En $x_0 = 0$, la tangente est d'équation $y = 1$.
En $x_0 = \frac{1}{2}$, la tangente est d'équation $y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{16}$.

(f) Les vecteurs directeurs des tangentes sont $\binom{1}{-8}$ et $\binom{1}{2}$. L'angle entre ces deux vecteurs est environ 146.310°. L'angle entre les tangentes est environ 33.690°.

(g) L'aire est donnée par l'intégrale suivante.

$$\int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \cdots \text{(on développe)} \cdots = \int_{-1}^{1} \big(-x^4 - 3x^2 + 4\big)\,dx = \cdots = \frac{28}{5}$$

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 219

3. $$\int \underset{\downarrow}{(2x+5)}\overset{\uparrow}{e^{-x}}\,dx = -(2x+5)e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx + C$$

$$= (-2x-5)e^{-x} - 2e^{-x} + C = (-2x-7)e^{-x} + C$$

4. Contraintes sur la longueur des tubes métalliques.

$$120 = \underbrace{4 \cdot 2\pi x \cdot \frac{1}{2}}_{\text{les 4 demi-cercles de rayon } x} + \overbrace{4y}^{\text{les 4 barres horizontales}}$$

$$\Leftrightarrow 120 = 4\pi x + 4y \Leftrightarrow y = 30 - \pi x$$

$$\text{Volume} = \underbrace{\frac{1}{2}\pi x^2}_{\text{demi-aire du disque de rayon } x} \cdot \overbrace{y}^{\text{longueur des barres horizontales}}$$

On substitue : $V(x) = \frac{1}{2}\pi x^2(30-\pi x) = \frac{1}{2}(30\pi x^2 - \pi^2 x^3)$

Domaine : de $x=0$ à $y=0$ $\left(\Leftrightarrow 30-\pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{30}{\pi}\right)$

$x \in \left]0, \frac{30}{\pi}\right[$

$$V'(x) = \frac{1}{2}(60\pi x - 3\pi^2 x^2) = \frac{3\pi}{2}x(20-\pi x)$$

x	0		$\frac{20}{\pi}$		$\frac{30}{\pi}$
$V'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
comp de V		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

On a un maximum pour $x = \frac{20}{\pi} \cong 6.37m$ et $y = 30 - \cancel{\pi} \cdot \frac{20}{\cancel{\pi}} = 10m$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 220

B. 0. En passant par la forme canonique, on obtient $(x-1)^2+y^2=28$. C'est bien l'équation cartésienne du cercle cité dans la donnée.

1. On substitue l'équation (h) dans (c), on trouve $x^2+\dfrac{108}{x^2}-2x=27$.

   On multiplie par x^2, on passe tout à gauche et on obtient une équation équivalente.

   $$x^4-2x^3-27x^2+108=0$$

   On peut deviner une factorisation, un zéro ou utiliser Gauss et Horner. On évite de faire la liste de tous les diviseurs de 108 en les essayant un par un.

   On peut facilement dire que 108 est multiple de 4 (car 108 divisé par 4 donne 27) et de 9 (car la somme des chiffres de 108 est un multiple de 9).

   On essaie de remplacer x par 1, puis -1, puis 2. Oui ! Pour $x=2$, cela donne 0, on peut donc factoriser par Horner ou par devinette. Ainsi

   $$x^4-2x^3-27x^2+108=(x-2)(x^3-27x-54)$$

   On continue en avançant dans les diviseurs de 108, dès qu'on en trouve un qui annule le polynôme de degré 3, on factorise et on fait Viète ! Plusieurs chemins sont possibles, mais on arrive tous à la même factorisation.

   On obtient
   $$x^4-2x^3-27x^2+108=(x-2)(x+3)^2(x-6)$$

   Les solutions cherchées sont $x=2$, $x=-3$ et $x=6$. En remplaçant dans la fonction (h), on trouve

   $$A(-3;-2\sqrt{3})\cong(-3;-3.464)\qquad B(2;3\sqrt{3})\cong(2;5.196)\qquad C(6;\sqrt{3})\cong(6;1.732)$$

2. Il faut calculer les dérivées, et donc trouver les fonctions à dériver.

   Pour la fonction issue de la courbe (c), on isole y. On a $y=\pm\sqrt{-x^2+2x+27}$, cela donne deux fonctions.

   Celle qui passe par le point A est la fonction $f(x)=-\sqrt{-x^2+2x+27}$ (oui, on ne se gêne pas de lui donner un nom). Appelons g l'autre fonction, ainsi $g(x)=\sqrt{-x^2+2x+27}$.

   Pour (h), on voit directement la fonction $h(x)=\dfrac{6\sqrt{3}}{x}$.

   On peut calculer les dérivées.

   $$f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+27}}\qquad h'(x)=-\frac{6\sqrt{3}}{x^2}$$

   Il ne reste qu'à montrer que $f'(-3)$ et $h'(-3)$ sont égaux, puisqu'on a déjà établi que $f(-3)=h(-3)$ au point 1.

   $$f'(-3)=\cdots=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\qquad h'(-3)=\cdots=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 221

5. L'aire du trapèze $OMNE$ vaut l'aire du triangle ONE plus l'aire du triangle MNE.

$$A(x) = \text{Aire}(ONE) + \text{Aire}(MNE) = x + \tfrac{1}{2}(-x^3 + x^2 + 6x) = \tfrac{1}{2}(-x^3 + x^2 + 8x)$$

C'est la fonction à maximiser sur le domaine d'intérêt $I =]0, 3[$. On a (en factorisant la dérivée qui est un polynôme de degré 2)

$$A'(x) = \tfrac{1}{2}(-3x^2 + 2x + 8) = -\tfrac{3}{2}(x-2)(x+\tfrac{4}{3})$$

Le tableau de variation est :

k	0		2		3
$V'(k)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
comp.		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

On a un maximum pour $x = 2$ (en fait celui du dessin, ci-dessus).

6. **Version sans intégrale**
On calcule le volume du cylindre de rayon 2 (l'abscisse de M) et de hauteur 4 (l'ordonnée de M) et on y enlève le volume du cône décrit par la rotation du segment $[EM]$ autour de l'axe des y.
Cela donne

$$\begin{array}{llll}
 & \text{base du cylindre} \cdot \text{hauteur du cylindre} & - & \dfrac{1}{3}\,\text{base du cône} \cdot \text{hauteur du cône} \\
= & \pi 2^2 \cdot 4 & - & \dfrac{1}{3} \cdot \pi 2^2 \cdot 2 \\
= & \cdots = \dfrac{40\pi}{3} & &
\end{array}$$

Version avec intégrale
On fait tourner la fonction $f(x) = x + 2$ (qui décrit le segment $[EM]$ comme sur le dessin) autour de l'axe des y.

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^2 (x^2 + 2x)\,dx = 2\pi(\tfrac{1}{3}x^3 + x^2)\Big|_0^2 = 2\pi\Big((\tfrac{1}{3} \cdot 8 + 4) - 0\Big) = \frac{40\pi}{3}$$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 229

- **On exprime la fonction à optimiser en fonction d'une variable, et le domaine d'intérêt.**

  Contrainte 1 (relation entre r et α) : le périmètre de la base du cône est égal au périmètre du secteur.

$$2\pi r = R\alpha \iff r = \frac{R\alpha}{2\pi}$$

  Contrainte 2 (relation entre r et h) : Pythagore sur le triangle rectangle représenté dans le cône.

$$h^2 + r^2 = R^2 \iff h = \sqrt{R^2 - r^2} \overset{\text{contrainte 1}}{\iff} h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4\pi^2}\alpha^2}$$

  Le volume du cône est donné par

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \tfrac{1}{3} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur} \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \pi \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4\pi^2}\alpha^2} \end{aligned}$$

  Après simplification, on obtient

$$V(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \alpha^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

  Il faut maximiser cette fonction sur le domaine d'intérêt $]0, 2\pi[$.

  On peut soit dériver le carré de cette fonction (si on n'aime vraiment pas les racines carrées), soit dériver directement la fonction ci-dessus (ce qui a été fait).

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée est

$$V'(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}$$

  Sur le domaine de définition, elle s'annule (en $\alpha = 0$ et) en $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

  Son tableau de signes est

α	0		$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$		2π
$V'(\alpha)$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$
comportement de $V(\alpha)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

$$\Longrightarrow \quad \text{maximum global en } \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

  On remarque que cet angle ne dépend pas de R !

- **On donne la réponse demandée.**

  Le volume maximal associé est $V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right) = \ldots = \dfrac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 235

- **On fait le tableau de variation.**

  La dérivée est $A'(\alpha) = 4\cos^2(\alpha)\big(\cos^2(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\big)$. Comme $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$, on obtient

  $$\boxed{A'(\alpha) = 4\cos^2(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 3\big)}$$

  Entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, cette dérivée s'annule et change de signe lorsque $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\alpha)$	$+$	$+$	0	$-$	0
comportement de $A(\alpha)$		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

$\Longrightarrow$ maximum global en $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

- **On donne la réponse demandée.**

  Il s'agit du triangle pour lequel $2\alpha = \frac{\pi}{3}$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 236

On a

$$f'(m) = \frac{2(m-2)(m^3+2)}{m^3}$$

Le tableau de variation sur le domaine d'intérêt est

m		$-\sqrt[3]{2}$		0
$f'(m)$	$-$	0	$+$	$\lightning$
comportement de $f(m)$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$	

Le tableau montre que le minimum ne peut pas arriver au bord du domaine d'intérêt. Ainsi, le minimum local en $m = -\sqrt[3]{2}$ est bien le minimum de la fonction.

Il reste à calculer la longueur cherchée. Le calcul est bien plus simple avec la façon d'écrire la fonction $f(m) = (2-m)^2\Big(1+\dfrac{1}{m^2}\Big)$ établie dans la méthode subtile.

$$f(-\sqrt[3]{2}) = \big(2+\sqrt[3]{2}\,\big)^2\Big(1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Big) = \big(2+\sqrt[3]{2}\,\big)^2\Big(1+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\Big) = \tfrac{1}{2}\big(2+\sqrt[3]{2}\,\big)^3$$

$$= \Big(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\Big)^3\big(2+\sqrt[3]{2}\,\big)^3 = \big(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot 2+1\big)^3 = \big(\sqrt[3]{4}+1\big)^3$$

Ainsi, on $l(-\sqrt[3]{2}) = \sqrt{\big(\sqrt[3]{4}+1\big)^3} = \sqrt{1+\sqrt[3]{4}}^{\,3}$ cm

$\boxed{\text{retour à la résolution}}$

Complément de l'exercice 243

On se retrouve donc face à cette situation.

x		-3		-1		1		2	
$f(x)$	$+$	↯	$+$	2	$+$	↯	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	↯	$-$	0	$-$	↯	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	↯	$+$	$+$	$+$	↯	$+$	$+$	$+$
comp. de f				?					

Un des trois signes mis en rose est faux.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 244

On résume ce qu'on a trouvé afin de pouvoir faire le tableau de comportement.

En *visualisant dans sa tête* les graphes des facteurs, on peut déterminer ceux qui changent de signe, ceux qui ne changent pas de signe et ceux qui sont toujours positifs.

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2-1} \qquad f'(x) = \frac{x^2\,(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{2x\,(2x^2+3)}{(2x^2-1)^3}$$

On *calcule les valeurs du tableau qui ne sautent pas aux yeux* :

$$2x^2-1=0 \iff x^2=\tfrac{1}{2} \iff x=\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cong\pm 0.71$$
$$2x^2-3=0 \iff x^2=\tfrac{3}{2} \iff x=\pm\tfrac{\sqrt{6}}{2}\cong\pm 1.22$$

Remarques :

(a) si f est impaire, cela se voit sur son tableau de signes ;

(b) si f est impaire, alors f' est paire (et cela se voit aussi sur son tableau de signes) ;

(c) si f' est paire, alors f'' est impaire (et cela se voit encore sur son tableau de signes).

Cela fonctionne de manière similaire lorsque f est paire (f' est impaire et f'' est paire).

Le tableau de comportement est :

x		-1.22		-0.71		0		0.71		1.22	
$f(x)$	$-$	-0.92	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	0.92	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$
comp. de f											

En utilisant le fait que la fonction est impaire (on peut aussi faire cela quand la fonction est paire), on peut faire un tableau de comportement sur la partie positive ou nulle du domaine de définition (on utilisera la propriété de symétrie d'une fonction paire ou impaire pour dessiner son graphe).

x	0		0.71		1.22	
$f(x)$	0	$-$	$\lightning$	$+$	0.92	$+$
$f'(x)$	0	$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$
comp. de f						

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 268

b) On doit distinguer les limites quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$, car le type de limite pour la fonction f est différent (et donc la stratégie appliquée ne sera pas la même).

Lorsque $x \to -\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-2x+4}\right) \overset{\left((-\infty)+(+\infty)\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2\ -\ (4x^2-2x+4)}{2x-\sqrt{4x^2-2x+4}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{2x-\sqrt{4x^2-2x+4}}$$

Rappelons que $\sqrt{x^2}=-x$ si $x<0$.

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(2-\left(-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{4}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}} = \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, il y a une asymptote horizontale à gauche d'équation $y=\frac{1}{2}$.

Lorsque $x \to +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\left((+\infty)+(+\infty)\right)}{=} +\infty$, donc il n'y a pas d'asymptote horizontale à droite. Il y a peut-être une asymptote oblique.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{4x^2-2x+4}}{x}$$

Rappelons que $\sqrt{x^2}=x$ si $x>0$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=4$$

On peut donc tenter le calcul pour h.

$$h = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(2x+\sqrt{4x^2-2x+4}\right)-4x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+4}-2x\right)$$
$$\overset{\left((+\infty)-(+\infty)\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2-2x+4)\ -\ 4x^2}{\sqrt{4x^2-2x+4}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+4}{\sqrt{4x^2-2x+4}+2x}$$

Rappelons que $\sqrt{x^2}=-x$ si $x<0$.

$$h = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, il y a une asymptote oblique à droite d'équation $y=4x-\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{retour à la résolution}}$

Complément de l'exercice 312

6. Vecteurs normaux à t : $\overrightarrow{\Omega A} = \begin{pmatrix} -8 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur normal du plan π, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   Vecteur directeur de t :
   $$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{n} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$$

   Ainsi
   $$t : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -10 & + & 48\mu \\ y & = & 32 & + & 25\mu \\ z & = & -2 & + & 36\mu \end{array} \right. , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

7. La droite est parallèle ou incluse dans le plan si et seulement si le vecteur directeur de la droite $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur normal du plan $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ok, car $\vec{d} \bullet \vec{n} = 12 - 12 = 0$.
   Comme le point de la droite $P_0(-4; 1; -10)$ n'est pas sur le plan $(-12 + 40 \neq -22)$, d et π sont bien strictement parallèles.

8. Point de d : $P_0(-4; 1; -10)$.
   Point de π : $A(-10; 32; -2)$.
   Distance signée : $\delta(d, \pi) = \delta(P_0, \pi) = \dfrac{\overrightarrow{AP_0} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ -31 \\ -8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{25}} = \dfrac{18 + 32}{5} = 10$. Distance : 10.

9. Le centre de la sphère est sur la droite d, il est à distance 10 du point D (car la sphère est de rayon 10 puisque le plan est à distance 10 de la droite et car D est sur la sphère).

   Le centre est à l'intersection de la sphère de rayon 10 centrée en D et de la droite d. On substitue les équations de d dans l'équation de la sphère qui est $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 100$.

   On a
   $$\begin{array}{l} (-6 + 4k)^2 + (-2 - 2k)^2 + (-9 + 3k)^2 = 100 \\ \iff 36 - 48k + 16k^2 + 4 + 8k + 4k^2 + 81 - 54k + 9k^2 = 100 \\ \iff 29k^2 - 94k + 21 = 0 \underset{\Delta = 8836 - 2436 = 6400}{\overset{\text{Viète}}{\iff}} k = \dfrac{94 \pm 80}{58} = \dfrac{47 \pm 40}{29} \end{array}$$

   Ainsi $k = 3$ (centre $E(8; -5; -1)$) ou $k = \frac{7}{29}$. Il y a deux centres possibles.
   Une des deux sphères est d'équation $(x - 8)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 100$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 313

7. **Méthode 1 : particulière à cet exercice**

   L'angle entre les droites (AB) et (AC) vaut $60°$. Notons Ω le centre de la sphère cherchée. Notons d la distance entre Ω et A. Comme l'angle vaut $60°$, la distance entre Ω et la droite (AB) vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}d$ (un schéma aide à visualiser ; on utilise aussi le fait que $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

   Or, cette distance doit aussi valoir $5\sqrt{6}$, on a donc l'équation $\frac{\sqrt{3}}{2}d = 5\sqrt{6}$. Ainsi, $d = 10\sqrt{2}$.

   Ainsi, Ω est à l'intersection de la sphère centrée en A de rayon d, et la droite (AC) (on peut aussi remarquer que la distance d est le double de la distance entre A et C et utiliser un argument de triangles semblables (comme à la méthode suivante)).

   On trouve $\Omega_1(14;-8;-12)$ et $\Omega_2(-6;4;4)$, et les sphères sont d'équation

   $$(x-14)^2+(y+8)^2+(z+12)^2=150 \quad \text{et} \quad (x+6)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=150$$

   Méthode 2 : triangles semblables

   On calcule la projection orthogonale de C sur (AB) : on trouve $P(4;-\frac{3}{2};-\frac{15}{2})$. Le triangle ACP est semblable au triangle $A\Omega P$ où Ω est le centre de la sphère cherchée (faire un schéma).

   On a $\|\overrightarrow{CP}\| = \frac{5}{2}\sqrt{6}$, c'est la moitié du rayon désiré, donc Ω est deux fois plus loin de A que le point C, on trouve donc Ω grâce à $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OA} \pm 2\overrightarrow{AC}$.

   Ainsi, on a $\Omega_+(14;-8;-12)$ et $\Omega_-(-6;4;4)$, et les sphères sont d'équation

   $$(x-14)^2+(y+8)^2+(z+12)^2=150 \quad \text{et} \quad (x+6)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=150$$

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 314

1. Poser $B(0;y;0)$ et résoudre $\|\overrightarrow{AB}\| = 10 \iff y^2 = 64$.
2. Dans le plan xy, $\overrightarrow{BC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$, donc puisque la cote reste nulle, on a $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on ne change pas la longueur et l'opposé ne va pas car C a des coordonnées positives).

   Donc, par exemple, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$.

   Autre méthode : C est un des deux points d'intersection entre la sphère centrée en B de rayon 10, le plan passant par B dont le vecteur normal est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le plan $z = 0$.

   Autre méthode : On peut écrire $C(x;y;0)$ et résoudre le système deux équations à deux inconnues où la première équation est

   $$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 0 \iff 6x - 8(y - 8) = 0$$

   et où la deuxième équation est

   $$\|\overrightarrow{BC}\| = 10 \iff x^2 + (y - 8)^2 = 100$$

   Même si on peut résoudre ce système comme on le souhaite, isoler $(y - 8)$ de la première équation et le substituer dans la deuxième équation est un moyen très rapide de trouver x.

3. Les points sont 10 plus haut.
4. C'est évident, les quatre points satisfont $z = 10$ (et par trois points non alignés passe un unique plan).
5. Le centre est le milieu M de $[AG]$ (par exemple), le rayon vaut $\|\overrightarrow{AM}\|$.
6. T est à l'intersection de la droite verticale qui passe par M et de la sphère. Cette droite est parallèle à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. Le volume de la maison est le volume du toît auquel on additionne le volume du cube.

   Le cube est de volume 10^3 m^3.

   Le toit a un volume égal à 4 fois celui du tétraèdre $ESFN$ où $N(7;7;10)$ (point sur le plafond du cube sous le point S), ce volume est donné par

   $$4 \cdot \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{ES} \bullet \overrightarrow{EN}\right) = \cdots = \frac{400}{3} \text{ m}^3$$

8. La surface vaut 4 fois celle du triangle EFS. Cette surface est donnée par

   $$4 \cdot \frac{1}{2}\|\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{ES}\| = \cdots = 20\sqrt{41} \text{ m}^2$$

9. La cheminée passe par (EFS), car la projection de L dans le sol si situe vers $[AB]$, cela se voit sur le schéma du point 2.
   L'équation du plan (EFS) est $16x + 12y - 25z = -154$. L est sur ce plan ssi $z_L = 12$.
10. On calcule l'angle entre les plans (EFS) et (FGS) (pans du toit adjacents).

retour à la résolution

Complément de l'exercice 315

6. On cherche la projection orthogonale D du point A sur le plan π. Le point A' sera ainsi donné par

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AD} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AD}$$

Le point D est à l'intersection de la droite $d_\perp^A$ orthogonale à π passant par A.

$$d_\perp^A : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & 2\lambda \\ y & = & -1 & + & 4\lambda \\ z & = & -2 & - & \lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On substitue dans le plan π.

$$2(3+2\lambda) + 4(-1+4\lambda) - (-2-\lambda) + 17 = 0 \iff 21\lambda = -6 + 4 - 2 - 17 = -21 \iff \lambda = -1$$

Ainsi, on a $D(1;-5;-1)$. Par conséquent

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $A'(-1;-9;0)$ (qu'on trouve aussi directement en posant $\lambda = -2$ dans $d_\perp^A$).

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 322

Correction (1ere méthode calculatoire)

On nomme $T(x;y;z)$ pour un point de tangence.

On a une première équation : $T \in$ sphère, donc $x^2+y^2+z^2=9$.

Comme $\overrightarrow{\Omega T}$ est un vecteur normal au plan cherché π, on obtient une deuxième équation $\overrightarrow{\Omega T} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.

Pour la troisième équation, on utilise la distance signée entre π et Ω qui vaut

$$\delta(\pi,\Omega) = \frac{\overrightarrow{A\Omega} \bullet \vec{n}}{\vec{n}} = \pm \text{ rayon}$$

où $\vec{n} = \overrightarrow{\Omega T}$ (dont la norme reprend l'équation de la sphère, donc le rayon).

On obtient donc le système à résoudre

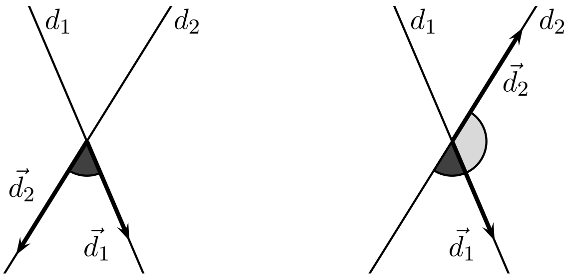
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y-z=0 \\ x+2z=\pm 3 \end{cases}$$

On va ainsi trouver quatre solutions $T_1(3;0;0)$, $T_2(-1;2;2)$, $T_3(1;-2;-2)$ et $T_4(-3;0;0)$.
À cause du $\pm$ de la troisième équation, on peut trouver des solutions en trop : ici, ce sont T_3 et T_4 : on ne le saura qu'après avoir écrit l'équation des plans et en vérifiant bien que ces plans contiennent A et B.
Si on obtient de fausses solutions, c'est parce qu'on utilise une formule de distance signée entre un plan et un point, et que le signe peut changer soit en prenant un vecteur normal opposé (ce qui ne change rien), soit en prenant l'opposé du vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ (et là, cela revient à travailler avec un autre point A, les faux points de tangence correspondent à des plans tangents qui passent par cet autre point A).

retour à la résolution | plus d'indications

Complément de l'exercice 327

Première façon : on calcule l'angle entre les vecteurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$: il vaut $\alpha \cong 18.43°$ (OB28).
Schéma pour la réflexion



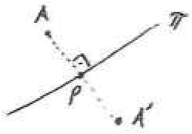
Comme α est un angle aigu, la situation est celle de gauche (l'angle est en gris foncé sur le schéma), et l'angle aigu entre les deux droites est l'angle α.

Si l'angle α avait été obtus, la situation aurait été celle de droite (l'angle est en gris clair sur le schéma), et l'angle aigu entre les deux droites (en gris foncé) serait donné par $180° - \alpha$.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 334

Ainsi la projection est $P(39\,;-16)$



Ainsi

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2\vec{AP} = \begin{pmatrix} 27 \\ -31 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Donc $A'(51\,;-1)$

7. a) On calcule la distance signée $d(\Omega,(AB))$

$$d(\Omega,(AB)) = \frac{\det(\vec{A\Omega},\vec{AB})}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\begin{vmatrix} -84 & 20 \\ 18 & -16 \end{vmatrix}}{\sqrt{656}} = \frac{984}{\sqrt{656}}$$

$$= \frac{984\sqrt{656}}{656} = \frac{3\sqrt{656}}{2} = \frac{3\cdot 4\sqrt{41}}{2} = 6\sqrt{41}$$

Le rayon vaut la même chose : $\sqrt{1476} = 6\sqrt{41}$

car $1476 = 36\cdot 41$

b) T est l'intersection de (AB) et du cercle

$$(x+57)^2 + (y+13)^2 = 1476$$

$$(AB) : \begin{cases} x = 27 + 5t \\ y = -31 - 4t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

On substitue (AB) dans le cercle

$$(5t+84)^2 + (-4t-18)^2 = 1476$$
$$\Leftrightarrow\ 41t^2 + 984t + 7380 = 1476$$
$$\Leftrightarrow\ 41t^2 + 984t + 5904 = 0$$
$$\overset{:41}{\Leftrightarrow}\ t^2 + 24t + 144 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (t+12)^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ t = -12$$

Donc $T(-33\,;17)$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 335

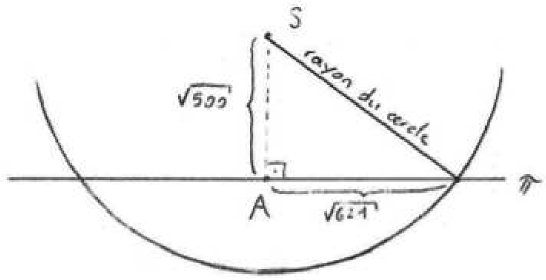
6. La distance signée de A à d est

$$\delta(A,d) \underset{\vec{d} /\!/ \binom{2}{11}}{\overset{B\in d}{=}} \frac{\det(\vec{BA},\vec{d})}{\|\vec{d}\|} = \frac{\begin{vmatrix}-18 & 2\\ -9 & 11\end{vmatrix}}{\sqrt{125}} = \frac{-180}{5\sqrt{5}} = -\frac{36}{5}\sqrt{5}$$

La distance vaut $\sqrt{\frac{1296}{5}} < \sqrt{621} = \sqrt{\frac{3105}{5}}$

Comme la distance de A à d est plus petit que le rayon du cercle Γ, il y a 2 points d'intersection (car d passe à l'intérieur de Γ)

7.



On a $\|\vec{SA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{500}$

Par Pythagore, le rayon du cercle vaut $\sqrt{500+621} = \sqrt{1121}$
Donc le cercle est d'équation

$$(x+9)^2 + (y+13)^2 = 1121$$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 340

a) **Méthode géométrique**

C est l'intersection entre la médiatrice au segment $[AB]$ avec la droite d.

L'équation de la médiatrice est $m_{AB} : x + 6y = 330$. On trouve $C(24; 51)$.

b) **Méthode géométrique**

C est la projection orthogonale du point B sur la droite d.

L'équation de la droite orthogonale à d et passant par B est $d_{\perp}^{B} : 5x - 7y = -237$.
On trouve $C(24; 51)$.

c) **Méthode analytique**

On résout l'équation $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ en utilisant le fait que $C \in d$.

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \overset{C(x;y)}{\iff} & \left\|\begin{pmatrix} x-49 \\ y-16 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} x-59 \\ y-76 \end{pmatrix}\right\| \\
\overset{C\in d}{\iff} & \left\|\begin{pmatrix} 5\lambda-40 \\ 56-7\lambda \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 5\lambda-50 \\ -4-7\lambda \end{pmatrix}\right\| \\
\overset{(\ )^2}{\iff} & (5\lambda-40)^2 + (56-7\lambda)^2 = (5\lambda-50)^2 + (4+7\lambda)^2 \\
\iff & 74\lambda^2 - 1184\lambda + 4736 = 74\lambda^2 - 444\lambda + 2516 \\
\iff & -740\lambda = -2220 \iff \lambda = 3
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\lambda = 3$ dans les équations paramétriques de d, on trouve $C(24; 51)$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 214

8. La longueur du segment vertical est donnée par la fonction $l(x) = g(x) - f(x)$ pour $x \in [-1, 3]$.
   On utilise les compétences développées dans

   OB20 **Dérivée** calcul à l'aide des règles

   OB6 **Factorisations** polynôme de degré 2, résolution d'équations

   OB11 **Fonctions** résolution d'inéquations

   La dérivée de cette fonction est $l'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 1}{(x+2)(x^2+1)}$.

   Le polynôme de degré 2 s'annule et change de signe en $x = -2 \pm \sqrt{5}$. Le facteur $(x+2)$ s'annule et change de signe en $x = -2$ et le facteur (x^2+1) est toujours positif.
   Le tableau de variation de cette fonction est

x	-1		$-2+\sqrt{5}$		3
$l'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
comportement de l		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	

9. L'aire est donnée par $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx -$ Aire du trapèze .

   On peut calculer l'aire du trapèze soit par la formule standard (la base fois la hauteur moyenne), soit en calculant, par devinette, l'intégrale de -1 à 3 de la fonction affine qui passe par B et C.

   On utilise les compétences développées dans

   OB24 **Calcul intégral** par parties

   Rappelons que l'intégrale $\int \ln(x)\,dx$ se calcule par parties en écrivant $\int 1 \cdot \ln(x)\,dx$. La primitive se trouve aussi dans le formulaire (mais le temps de trouver la bonne page, l'intégrale par parties est terminée).

retour à la résolution

Complément de l'exercice 218

3. L'aire du rectangle vaut $A(x) = 2x \cdot h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. À maximiser sur le domaine d'intérêt $[0, +\infty[$.
   Ainsi
$$A'(x) = \frac{2 \cdot (x^2+1) \quad - \quad 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$
   Voici le tableau de variation.

x	0		1	
$A'(x)$	2	$+$	0	$-$
comportement de A		$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$

   On constate un maximum pour $x = 1$.

   Les dimensions du rectangle sont donc 2 pour la largeur et $\frac{1}{2}$ pour la hauteur.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 220

B. 3. Les vecteurs directeurs des tangentes en C sont

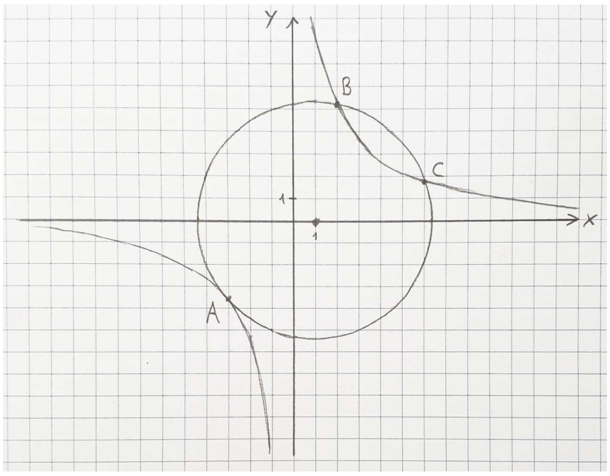
$$\begin{pmatrix}1\\g'(6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\h'(6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}$$

On a utilisé la fonction g parce que le point C est au-dessus de l'axe des x.

L'angle entre ces deux vecteurs vaut environ $54.79128°$, c'est aussi l'angle entre les tangentes.

4. On dessine le cercle centré en $(1; 0)$ de rayon $\sqrt{28} \cong 5.292$.

L'autre courbe ressemble au graphe de $\frac{1}{x}$ (hyperbole dont les axes des x et des y sont des asymptotes). Comme elle passe par A, B et C, tangente au cercle en A, elle se dessine aisément (en plus c'est une fonction impaire, donc on a 6 points).



5. En utilisant la formule pour calculer des volumes de révolution autour de l'axe des x, le volume cherché vaut

$$\pi\int_2^6(-x^2+2x+27)\,dx\;-\;\pi\int_2^6\frac{108}{x^2}\,dx$$

On devine les primitives, on évalue, et on arrive à $\dfrac{104\pi}{3}$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 243

Comme f et f'' sont continues et qu'en $x = -1$ les deux valeurs sont positives, entre $x = -1$ et $x = 1$, on est obligé d'avoir des nombres positifs. Les cases correspondantes sont mises en vert

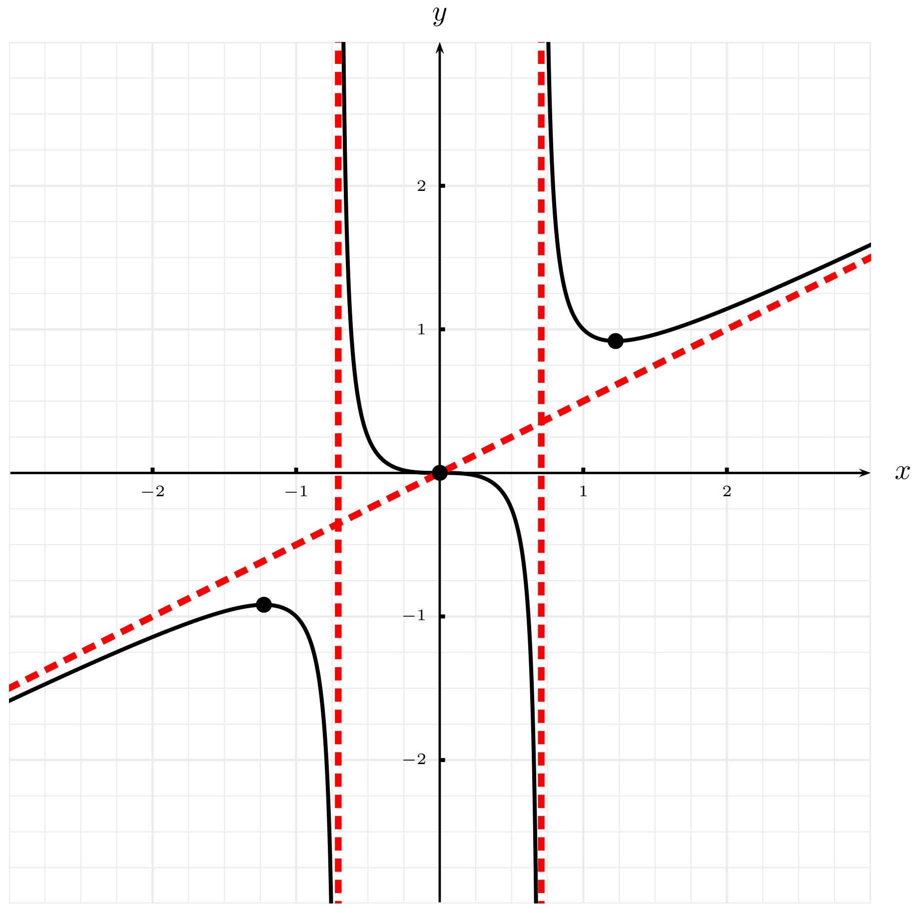
x		-3		-1		1		2	
$f(x)$	$+$	↯	$+$	2	$+$	↯	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	↯	$-$	0	$-$	↯	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	↯	$+$	$+$	$+$	↯	$+$	$+$	$+$
comp. de f				?					

On sait maintenant où est l'erreur : c'est le signe $-$ en rose.

retour à la résolution — plus d'indications

Complément de l'exercice 244

4. Graphe



retour à la résolution

Complément de l'exercice 313

7. **Méthode 3 : résolution analytique**

   On cherche Ω le centre de la sphère. On sait que $\Omega \in (AC)$ et que $d(\Omega,(AB)) = 5\sqrt{6}$.

   La droite (AC) est représentée comme suit.

$$(AC) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & + & 5\mu \\ y & = & -2 & - & 3\mu \\ z & = & -4 & - & 4\mu \end{array} \right. , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

   La distance $d(\Omega,(AB)) = 5\sqrt{6}$ donne une équation à résoudre.

$$d(\Omega,(AB)) = 5\sqrt{6} \iff \frac{\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 5\sqrt{6}$$

   On peut utiliser un vecteur parallèle à $\overrightarrow{AB}$. On pose $\Omega(x;y;z)$ et ainsi $\overrightarrow{A\Omega} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y+2 \\ z+4 \end{pmatrix}$.

   Comme Ω est sur la droite (AC), le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ s'écrit $\overrightarrow{A\Omega} = \begin{pmatrix} 5\mu \\ -3\mu \\ -4\mu \end{pmatrix}$.

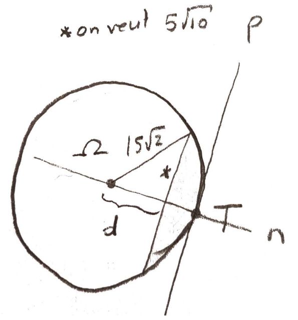
   Ainsi l'équation est équivalente à $\mu^2 = 4$, donc équivalente $\mu = \pm 2$.

   Ainsi, on a $\Omega_+(14;-8;-12)$ et $\Omega_-(-6;4;4)$, et les sphères sont d'équation

$$(x-14)^2 + (y+8)^2 + (z+12)^2 = 150 \quad \text{et} \quad (x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 150$$

8. On peut calculer la distance d montrée sur le schéma ci-contre.
   Par Pythagore, on a

$$d = \sqrt{\left(15\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{450-250} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$



   On trouve un point sur chaque plan cherché en calculant les intersections entre la droite n (qui passe par le centre de la sphère et de vecteur directeur $\overrightarrow{\Omega T}$) et la sphère σ centrée en Ω de rayon d.

$$\sigma : (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 200 \qquad n : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 5t \\ y & = & 1 & - & 3t \\ z & = & & - & 4t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

   On substitue :

$$25t^2 + 9t^2 + 16t^2 = 200 \iff 50t^2 = 200 \iff t = \pm 2$$

   On trouve les points $P_+(9;-5;-8)$ et $P_-(-11;7;8)$.

   Puisque les plans sont parallèles à p, ils ont le même vecteur normal, donc les plans cherchés sont $\pi_+ : 5x - 3y - 4z = 92$ et $\pi_- : 5x - 3y - 4z = -108$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 315

7. (a) Il suffit de montrer que $d(\Omega,(AB))=\sqrt{14}$.

$$d(\Omega,(AB))=\frac{\left\|\overrightarrow{A\Omega}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\left\|\begin{pmatrix}-4\\-8\\2\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{6}}=\sqrt{14}$$

(b) **Méthode 1**

Le point T est la projection orthogonale du point Ω sur la droite (AB).

Le point T est à l'intersection de (AB) et du plan $\pi_\perp^\Omega$ orthogonal à (AB) passant par Ω.

$$\pi_\perp^\Omega : -x+y+2z=4 \quad \text{et} \quad (AB):\left\{\begin{array}{ccccc} x&=&0&-&\mu\\ y&=&2&+&\mu\\ z&=&4&+&2\mu\end{array}\right. ,\quad \mu\in\mathbb{R}$$

On substitue.

$$-(0-\mu)+(2+\mu)+2(4+2\mu)=4 \iff 6\mu=-2-8+4=-6 \iff \mu=-1$$

Ainsi, on a $T(1;1;2)$.

Méthode 2

Le point T est à l'intersection de (AB) et de la sphère $\mathcal{S}$ centrée en Ω de rayon $\sqrt{14}$.

$$\mathcal{S}:(x-4)^2+y^2+(z-4)^2=14 \quad \text{et} \quad (AB):\left\{\begin{array}{ccccc} x&=&0&-&\mu\\ y&=&2&+&\mu\\ z&=&4&+&2\mu\end{array}\right. ,\quad \mu\in\mathbb{R}$$

On substitue.

$$(4+\mu)^2+(2+\mu)^2+(2\mu)^2=14 \iff \mu^2+8\mu+16+\mu^2+4\mu+4+4\mu^2-14=0$$

$$\iff 6\mu^2+12\mu+6=0 \iff \mu^2+2\mu+1=0 \iff (\mu+1)^2=0 \iff \mu=-1$$

Ainsi, on a $T(1;1;2)$.

Comme la droite (AB) est évidemment incluse dans le plan (ABC), le fait qu'il n'y ait qu'un point d'intersection entre la sphère contenant le cercle et la droite (AB) montre la tangence ! Ainsi la **méthode 2** suffit pour les points 7 a) et b).

retour à la résolution

Complément de l'exercice 322

Correction (2e méthode calculatoire)

Ici, la distance entre la sphère Σ et la droite d est plus grande que le rayon. On se trouve dans la troisième situation (qui est la plus compliquée).

On cherche les plans π d'équation $\pi : ax + by + cz = d$.

Astuce : on pose $a = 1$

> On peut faire cela tant que le x apparaît dans l'équation. Si toutefois, on ne trouvait pas exactement deux plans, alors l'équation de plan qui n'a pas été trouvé serait de la forme $by + cz = d$ (pas de terme en x).
>
> Dans ce cas, une deuxième astuce consisterait à poser $b = 1$. On peut faire cela tant que le y apparaît dans l'équation. Sinon, l'équation du plan qui n'a pas été trouvé serait de la forme $z = d$ (pas besoin d'écrire $cz = d$) et serait évidente à trouver.

Ainsi, on cherche les plans π d'équation $\pi : x + by + cz = d$, donc de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$, qui satisfont les trois conditions suivantes.

Condition	Traduction en équation
$A(3;0;6) \in \pi$, car le plan contient d et donc A	$3 + 6c = d$
$B(3;5;1) \in \pi$, car le plan contient d et donc B	$3 + 5b + c = d$
$\text{dist}(\pi, C) = \pm r$, car le plan est tangent à la sphère.	$\dfrac{\overrightarrow{AC} \bullet \vec{n}}{\\|\vec{n}\\|} = \pm 3$

Il y a un $\pm$ dans la dernière équation, car il s'agit d'une distance signée (mais ce $\pm$ va disparaître par la suite lorsqu'on élèvera au carré).
On utilise les deux premières équations pour exprimer c en fonction de d. On aura

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3 & + & & + & 6c & = & d \\ 3 & + & 5b & + & c & = & d \end{array}\right. \overset{\text{substitution de } d}{\Longrightarrow} 3 + 6c = 3 + 5b + c \iff 5c = 5b \iff c = b$$

Maintenant qu'on sait que $c = b$, on peut attaquer l'équation de la distance.

$$\text{dist}(\pi, C) = \pm r \iff \frac{\overrightarrow{AC} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \pm 3 \iff \frac{\begin{pmatrix}-3\\0\\-6\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\c\\c\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\c\\c\end{pmatrix}\right\|} = \pm 3 \iff \frac{-3 - 6c}{\sqrt{1 + 2c^2}} = \pm 3$$

$$\iff -3 - 6c = \pm 3\sqrt{1 + 2c^2} \overset{(\ )^2}{\Longrightarrow} 36c^2 + 36c + 9 = 9(1 + 2c^2)$$

$$\iff 18c^2 + 36c = 0 \iff 18c(c + 2) = 0 \iff c = 0 \text{ ou } c = -2$$

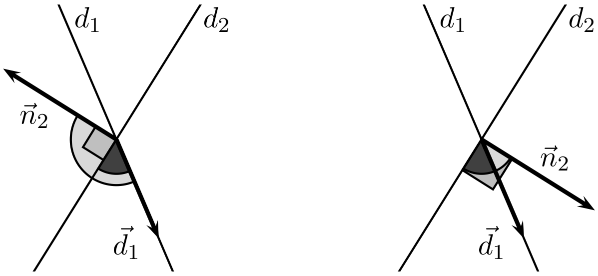
Pour $c = 0$, on a $b = c = 0$ et $d = 3 + 6c = 3$. Donc le plan est $\boxed{x = 3}$.

Pour $c = -2$, on a $b = c = -2$ et $d = 3 + 6c = -9$. Donc le plan est $\boxed{x - 2y - 2z = -9}$.

retour à la résolution

Complément de l'exercice 327

Deuxième façon : on calcule l'angle entre les vecteurs $\vec{d_1}$ et $\vec{n}_2$: il vaut $\alpha \cong 108.43°$ (OB28).
Schéma pour la réflexion



Comme α est un angle obtus, la situation est celle de gauche (l'angle est en gris clair sur le schéma) : l'angle aigu entre les deux droites (en gris foncé) est donné par $\alpha - 90° \cong 18.43°$.

Si l'angle α avait été aigu, la situation aurait été celle de droite (l'angle est en gris clair sur le schéma) : l'angle aigu entre les deux droites (en gris foncé) est donné par $90° - \alpha$.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 243

Voici l'erreur corrigée et le comportement redessiné.

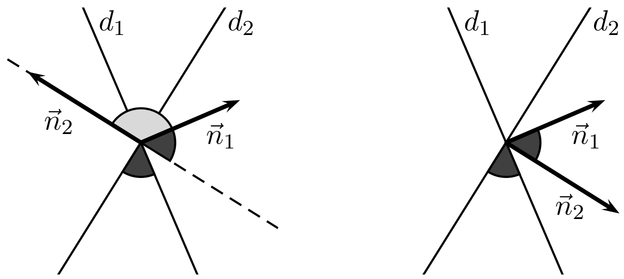
x		-3		-1		1		2	
$f(x)$	$+$	$\lightning$	$+$	2	$+$	$\lightning$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	$\lightning$	$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$	$\lightning$	$+$	$+$	$+$
comp. de f									

Moralité : les incohérences au niveau du comportement permettent de localiser une erreur et de la réparer (bien sûr, il faut examiner les factorisations de f, f' et f'' pour être certain d'avoir bien réparé l'erreur).

retour à la résolution

Complément de l'exercice 327

Troisième façon : on calcule l'angle entre les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$: il vaut $\alpha \cong 18.43°$ (OB28).
Schéma pour la réflexion



Comme α est un angle aigu, la situation est celle de droite (l'angle est en gris foncé sur le schéma), et l'angle aigu entre les deux droites est l'angle α.

Si l'angle α avait été obtus, la situation aurait été celle de gauche (l'angle est en gris clair sur le schéma), et l'angle aigu entre les deux droites (en gris foncé) serait donné par $180° - \alpha$.

retour à la résolution