Corrections
ou éléments de réponses
des exercices de première année

Table des matières

1.1 Révisions de l'école secondaire

Calculs numériques

Résolution de l'exercice 0

1. a) Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par un chiffre pair.
   b) Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 (on peut effectuer la somme des chiffres autant de fois que nécessaire).
   c) Un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un nombre qui est un multiple de 4.
   d) Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.
   e) Un nombre est divisible par 6 s'il est simultanément divisible par 2 et par 3.
   f) Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
   g) Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0.
   h) Un nombre est divisible par 11 si la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11.

2. Les réponses sont :

   a) $12 = 2^2 \cdot 3$ b) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ c) $96 = 2^5 \cdot 3$ d) $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

Résolution de l'exercice 1

1. a) $3-10=-7$

   b) $45-3\cdot 16=45-48=-3$ (il y a d'autres manières)

   c) $-9+9(1+5)=-9+9\cdot 5=-9+45=36$ (idem)

   d) $5^2-4+9=25+5=30$ (idem)

2. a) $15\div(5-2)=15\div 3=5$

   b) $5\cdot(8-4)\div 2=5\cdot 4\div 2=5\cdot 2=10$

3. a) $13(3^2-2^2)=13(9-4)=13\cdot 5=65$

   b) $\dfrac{17\cdot 13}{5}-\dfrac{13\cdot 7}{5}=\dfrac{13}{5}(17-7)=\dfrac{13}{5}\cdot 10=13\cdot\dfrac{10}{5}=13\cdot 2=26$

4. a) $\dfrac{182}{154}=\dfrac{91}{77}=\dfrac{70+21}{77}=\dfrac{10+3}{11}=\dfrac{13}{11}$

   b) $\dfrac{594}{165}=\dfrac{\cancel{11}\cdot 54}{\cancel{11}\cdot 15}=\dfrac{\cancel{3}\cdot 18}{\cancel{3}\cdot 5}=\dfrac{18}{5}$

5. a) $\dfrac{12}{18}=\dfrac{6\cdot 2}{6\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{5}{7}=\dfrac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\dfrac{15}{21}$

6. a) $\dfrac{5}{11}=\dfrac{35}{77}$ et $\dfrac{3}{7}=\dfrac{33}{77}$, donc $\dfrac{5}{11}>\dfrac{3}{7}$ (car $35>33$)

   b) $\dfrac{8}{13}=\dfrac{64}{13\cdot 8}$ et $\dfrac{5}{8}=\dfrac{65}{8\cdot 13}$, donc $\dfrac{8}{13}<\dfrac{5}{8}$ (car $64<65$)

7. a) $\dfrac{7}{5}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{21}{15}+\dfrac{10}{15}=\dfrac{31}{15}$

   b) $\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{9}+\dfrac{15}{9}=\dfrac{19}{9}$

   c) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{9}{3}+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{\cancel{3}}{5}\cdot\dfrac{11}{\cancel{3}}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{11}{5}=-\dfrac{10}{5}=-2$

   d) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{14}{35}-\dfrac{6}{35}=\dfrac{8}{35}$

plus d'indications

Puissances et racines

Résolution de l'exercice 2

0. a) $9^4 \cdot 3^{-8} = (3^2)^4 \cdot 3^{-8} = 3^8 \cdot 3^{-8} = 3^0 = 1$

b) $2^{-2} \cdot 2^6 = 2^{-2+6} = 2^4 = 16$

c) $\sqrt[4]{16}^{\,3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{64}} = \sqrt{\sqrt{16}}^{\,3} \cdot \dfrac{1}{8} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{8} = 1$

ou aussi

$$16^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} \cdot (2^6)^{-\frac{1}{2}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} \cdot 2^{6\cdot(-\frac{1}{2})} = 2^3 \cdot 2^{-3} = 2^0 = 1$$

d) $\sqrt[3]{5} \cdot 5^{\frac{5}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

1. a) 2^9

b) $\left((2^5)^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^{5\cdot\frac{1}{2}\cdot 6} = 2^{5\cdot 3} = 2^{15}$

c) $\dfrac{64}{16} \div 4^{-2} = 4 \cdot 4^2 = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6$

ou aussi

$$\frac{2^6}{2^4} \cdot 4^2 = 2^{6-4} \cdot (2^2)^2 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^6$$

d) $8 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}\right)^6 = 2^3 \cdot \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{2^3}$

ou aussi

$$8 \cdot (8^{-\frac{1}{3}})^6 = 8 \cdot 8^{-2} = 8^{-1} = (2^3)^{-1} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

2. a) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^8 \cdot 2^{27} = 2^{-24} \cdot 2^{27} = 2^3$

b) $\dfrac{7^{10} \cdot 2^6 \cdot 5^{-6}}{7^7 \cdot 2^{-6} \cdot 5^{-3}} = 7^3 \cdot 2^{12} \cdot 5^{-3} = \dfrac{7^3 \cdot 2^{12}}{5^3}$

plus d'indications

Calculs littéraux

Résolution de l'exercice 3

1. a) $x - 3x + (x^2 - 5) - 3 = x^2 - 2x - 8$

ou aussi

$x - (3x - x^2 + 5 + 3) = x - (-x^2 + 3x + 8) = x^2 - 2x - 8$

b) $a + b - (a - b - 3a + b - a) = a + b - (-3a) = 4a + b$

2. a) $(2x - 1)(3 + x) = 2x^2 + 5x - 3$

b) $(-2x + 3)(4x - \frac{1}{2}) = -8x^2 + 13x - \frac{3}{2}$

3. a) $-8x^4y^2 - 10x^2y^3$

b) $-18x^3y - 6x^2y + 6xy^2$

4. a) $ab(a^2 - b^2) = ab(a - b)(a + b)$

b) $(a - 2b)^2 - 9x^2 = (a - 2b - 3x)(a - 2b + 3x)$

5. a) $(x + 5)(3x - y)$

b) $(x+4)^2((x+4) - (9x^2 + x)) = (x+4)^2(4 - 9x^2)$

$= (x+4)^2(2 - 3x)(2 + 3x)$

6. a) $x^2(x + y) - 4(x + y) = (x^2 - 4)(x + y) = (x - 2)(x + 2)(x + y)$

b) $2x^2(5x - 3) - 8(5x - 3) = (2x^2 - 8)(5x - 3)$

$= 2(x^2 - 4)(5x - 3) = 2(x + 2)(x - 2)(5x - 3)$

Simplification de racines

Résolution de l'exercice 4

a) $\sqrt{4 \cdot 6} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} = (2-1)\sqrt{6} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt{9 \cdot 7} - \sqrt{7} = 3\sqrt{7} - \sqrt{7} = (3-1)\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

d) $\sqrt{7 \cdot 2}\sqrt{2} = \sqrt{7}\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{7}$

e) $\sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$

Simplification de fractions avec des racines

♡ Exercice 5 : Simplification de fractions et de racines (5 minutes)

1. Simplifier les fractions et racines suivantes, en éliminant les racines du dénominateur.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{15}\sqrt{30}}$ b) $\sqrt{\dfrac{8}{12}}$ c) $\dfrac{6+\sqrt{108}}{8}$

Correction

a) $$\frac{3}{\sqrt{15}\sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{15\cdot 30}} = \frac{3}{\sqrt{15^2\cdot 1\cdot 2}} = \frac{3}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

b) $$\sqrt{\frac{8}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

c) $$\frac{6+\sqrt{108}}{8} = \frac{6+6\sqrt{3}}{8} = \frac{3+3\sqrt{3}}{4}.$$

♡ Exercice 6 : Simplification de fractions et de racines (3 fois 5 minutes)

1. Simplifier les fractions et racines suivantes, en éliminant les racines du dénominateur.

a) $\dfrac{3+\sqrt{45}}{15}$ b) $\dfrac{8}{\sqrt{6}\sqrt{10}}$ c) $\sqrt{\dfrac{10}{8}}$

Correction

a) $$\frac{3+\sqrt{45}}{15} = \frac{3+3\sqrt{5}}{15} = \frac{1+\sqrt{5}}{5}.$$

b) $$\frac{8}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{6\cdot 10}} = \frac{8}{\sqrt{2^2\cdot 3\cdot 5}} = \frac{8}{2\sqrt{15}} = \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}.$$

c) $$\sqrt{\frac{10}{8}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2. Simplifier les fractions et racines suivantes, en éliminant les racines du dénominateur.

a) $\sqrt{\dfrac{9}{15}}$ b) $\dfrac{8+\sqrt{48}}{24}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{21}\sqrt{42}}$

Correction

a) $\sqrt{\dfrac{9}{15}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

b) $\dfrac{8+\sqrt{48}}{24} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{24} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{6}$.

c) $\dfrac{4}{\sqrt{21}\sqrt{42}} = \dfrac{4}{\sqrt{21\cdot 42}} = \dfrac{4}{\sqrt{21^2\cdot 1\cdot 2}} = \dfrac{4}{21\sqrt{2}} = \dfrac{4}{21\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{21}$.

3. Simplifier les fractions et racines suivantes, en éliminant les racines du dénominateur.

a) $\dfrac{2+\sqrt{32}}{6}$ b) $\sqrt{\dfrac{15}{6}}$ c) $\dfrac{8}{\sqrt{15}\sqrt{21}}$

Correction

a) $\dfrac{2+\sqrt{32}}{6} = \dfrac{2+4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

b) $\sqrt{\dfrac{15}{6}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

c) $\dfrac{8}{\sqrt{15}\sqrt{21}} = \dfrac{8}{\sqrt{15\cdot 21}} = \dfrac{8}{\sqrt{3^2\cdot 5\cdot 7}} = \dfrac{8}{3\sqrt{35}} = \dfrac{8}{3\sqrt{35}} = \dfrac{8\sqrt{35}}{105}$.

Multiplication de polynômes

Résolution de l'exercice 7

a) En développant, on trouve

$$(4a-b+3c)(d+2e-f)=4ad+8ae-4af-bd-2be+bf+3cd+6ce-3cf$$

b) En développant, on trouve

$$(4x^2-x+3)(x^2+2x-1)=4x^4+7x^3-3x^2+7x-3$$

Pour calculer $(4a-b+3c)(d+2e-f)$, on ne peut que développer brutalement, alors que pour calculer $(4x^2-x+3)(x^2+2x-1)$, on peut aussi développer en cherchant des coefficients spécifiques (d'abord le coefficient dominant, qui est celui de x^4, puis celui de x^3, puis celui de x^2, puis celui de x, et finalement le terme constant).

Résolution de l'exercice 8

1. On obtient $9x^4-3x^3+4x^2+17x+5$.
2. (a) Le terme constant vaut -15 et le coefficient dominant vaut 9.
   (b) Le coefficient de x^3 vaut 7 et le coefficient de x^4 vaut -12.

Résolution de l'exercice 9

1. $3x^5-14x^4+25x^3-13x^2-16x-15$
2. $-3x^5+6x^4-3x^3+4x^2-3x-1$
3. a) -20 b) -2 c) 25 d) -25 e) 8 f) 10

Factorisation de polynômes

Résolution de l'exercice 10

a) $(x+1)\big((x^3-1)-(16x-1)\big) = (x+1)\big(x^3-16x\big) = (x+1)x(x^2-16) = x(x+1)(x+4)(x-4)$

b) $x^2(81x^4-72x^2+16) = x^2(9x^2-4)^2 = x^2(3x-2)^2(3x+2)^2$

c) $x^2(4x+1)-(4x+1) = (x^2-1)(4x+1) = (x+1)(x-1)(4x+1)$

Résolution de l'exercice 11

a) $(5x-1)\big((9x^2+2)-(1-6x)\big) = (5x-1)\big(9x^2+6x+1) = (5x-1)(3x+1)^2$

b) $x^2(4x+5)-9(4x+5) = (x^2-9)(4x+5) = (x+3)(x-3)(4x+5)$

c) $\big((4x^2-2)+(20x+27)\big)(2x+5) = \big(4x^2+20x+25\big)(2x+5) = (2x+5)^2(2x+5) = (2x+5)^3$

d) $x^7(x^4-8x^2+16) = x^7(x^2-4)^2 = x^7(x+2)^2(x-2)^2$

e) $(3x+1)\big((3x-8)^2-(65-48x)\big) = (3x+1)\big(9x^2-1\big) = (3x+1)(3x-1)(3x+1) = (3x+1)^2(3x-1)$

f) $25x^2(5x+3)-16(5x+3) = (25x^2-16)(5x+3) = (5x+4)(5x-4)(5x+3)$

g) $\big((5x-1)^2-10(1-x)\big)(5x-3) = \big(25x^2-9\big)(5x-3) = (5x-3)(5x+3)(5x-3)$
$= (5x-3)^2(5x+3)$

h) $x^3(81x^4-18x^2+1) = x^3(9x^2-1)^2 = x^3(3x+1)^2(3x-1)^2$

Résolution de l'exercice 12

a) $(4x-5)\big((4x^3-3)-(9x-3)\big) = (4x-5)\big(4x^3-9x\big) = (4x-5)x(4x^2-9) = x(4x-5)(2x-3)(2x+3)$

b) $x^7(16x^4-8x^2+1) = x^7(4x^2-1)^2 = x^7(2x-1)^2(2x+1)^2$

c) $\big((x-5)^2-2(17-5x)\big)(x+3) = \big(x^2-9\big)(x+3) = (x+3)(x-3)(x+3) = (x+3)^2(x-3)$

d) $25x^2(2x-5)-16(2x-5) = (25x^2-16)(2x-5) = (5x-4)(5x+4)(2x-5)$

e) $(5x-1)\big((5x+2)^2-5(4x+1)\big) = (5x-1)\big(25x^2-1\big) = (5x-1)(5x-1)(5x+1) = (5x-1)^2(5x+1)$

f) $x^8(81x^4-72x^2+16) = x^8(9x^2-4)^2 = x^8(3x-2)^2(3x+2)^2$

g) $(3x+5)\big(2(8x^2+25)-5(8x+5)\big) = (3x+5)\big(16x^2-40x+25\big) = (3x+5)(4x-5)^2$

h) $x^2(5x-3)-16(5x-3) = (x^2-16)(5x-3) = (x-4)(x+4)(5x-3)$

1.2 Zéros et factorisation de polynômes de degré 2

Résolution de l'exercice 13

a) $36 + 24 = 60$ b) $36 - 24 = 12$ c) $25 - 48 = -23$ d) $1 + 12 = 13$

Résolution de l'exercice 14

a) $(x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9$

b) $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$

c) $(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 4 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$

♡ **Exercice 15 : tout sur la formule de Viète** (3 fois 5 minutes)

1. Trouver les zéros des polynômes suivants en utilisant la méthode la plus simple possible.

a) $4x^2 + 7x$ b) $2x^2 - 3$ c) $\frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

Correction

a) $4x^2 + 7x = 0 \iff x(4x+7) = 0 \overset{\text{propriété}}{\underset{\text{du produit}}{\iff}} x = 0 \text{ ou } x = -\dfrac{7}{4}$

Donc $Z = \left\{0, -\dfrac{7}{4}\right\}$.

b) $2x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = \dfrac{3}{2} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \overset{\text{amplifier}}{\underset{\text{ou simplifier}}{\iff}} x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Donc $Z = \left\{\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

c) On a $\Delta = 9 - 5 = 4$.

Ainsi $\frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0 \overset{\text{Viète}}{\iff} x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{4}}{5}$.

Donc $Z = \left\{-1, \dfrac{-1}{5}\right\}$.

2. Calculer les discriminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 des trois polynômes suivants et factoriser les polynômes qui sont factorisables dans $\mathbb{R}$.

$$p_1(x) = 5x^2 - 6x + 1 \qquad p_2(x) = 5x^2 + x + 6 \qquad p_3(x) = -2x^2 + 4x - 2$$

Correction

$\Delta_1 = 36 - 20 = 16 \implies p_1$ se factorise dans $\mathbb{R}$

$\Delta_2 = 1 - 120 < 0 \implies p_2$ est irréductible dans $\mathbb{R}$

$\Delta_3 = 16 - 16 = 0 \implies p_3$ se factorise dans $\mathbb{R}$ grâce à une identité remarquable

Les zéros de p_1 sont $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{10}$. Ainsi $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{5}$.

$$p_1(x) = 5\,(x-1)\,\left(x - \tfrac{1}{5}\right)$$

Vérifier les factorisations !

Pour p_3, on a $p_3(x) = -2(x-1)^2$

3. Factoriser le polynôme suivant en passant par sa forme canonique et vérifier ses zéros grâce à la formule de Viète.
$$p(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

Correction

$$= 3\Big(x^2 - \tfrac{5}{3}x + \tfrac{1}{3}\Big)$$
$$= 3\Big(\big(x - \tfrac{5}{6}\big)^2 - \tfrac{25}{36} + \tfrac{1}{3}\Big) = 3\Big(\big(x - \tfrac{5}{6}\big)^2 - \tfrac{13}{36}\Big)$$
$$= 3\left(\left(x - \frac{5}{6}\right) - \frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(\left(x - \frac{5}{6}\right) + \frac{\sqrt{13}}{6}\right)$$
$$= 3\left(x - \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$$

Vérification par la formule de Viète

Le discriminant vaut $\Delta = 25 - 12 = 13$. Les zéros de p sont $\dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

♡ **Exercice 16 : résolution d'équations du deuxième degré** (3 fois 5 minutes)

1. Trouver les zéros des polynômes suivants en utilisant la méthode la plus simple possible.

a) $8x^2 + 6x + 1$ b) $3x^2 + 7x$ c) $6x^2 - 1$

Correction

a) On a $\Delta = 36 - 32 = 4$.
Ainsi $8x^2 + 6x + 1 = 0 \overset{\text{Viète}}{\iff} x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{4}}{16}$.
Donc $Z = \left\{\dfrac{-1}{4}, \dfrac{-1}{2}\right\}$.

b) $3x^2 + 7x = 0 \iff x(3x+7) = 0 \underset{\text{du produit}}{\overset{\text{propriété}}{\iff}} x = 0$ ou $x = -\dfrac{7}{3}$
Donc $Z = \left\{0, -\dfrac{7}{3}\right\}$.

c) $6x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \dfrac{1}{6} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{6}} \underset{\text{ou simplifier}}{\overset{\text{amplifier}}{\iff}} x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$
Donc $Z = \left\{\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right\}$.

2. Trouver les zéros des polynômes suivants en utilisant la méthode la plus simple possible.

a) $5x^2 + 2x$ b) $\frac{7}{4}x^2 - 4x + 1$ c) $3x^2 - 4$

Correction

a) $5x^2 + 2x = 0 \iff x(5x+2) = 0 \overset{\text{propriété}}{\underset{\text{du produit}}{\iff}} x = 0 \text{ ou } x = -\dfrac{2}{5}$

Donc $Z = \left\{0, -\dfrac{2}{5}\right\}$.

b) On a $\Delta = 16 - 7 = 9$.

Ainsi $\frac{7}{4}x^2 - 4x + 1 = 0 \overset{\text{Viète}}{\iff} x = \dfrac{4 \pm \sqrt{9}}{\frac{7}{2}}$.

Donc $Z = \left\{2, \dfrac{2}{7}\right\}$.

c) $3x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = \dfrac{4}{3} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} \overset{\text{amplifier}}{\underset{\text{ou simplifier}}{\iff}} x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Donc $Z = \left\{\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

3. Trouver les zéros des polynômes suivants en utilisant la méthode la plus simple possible.

a) $4x^2 - 5$ b) $3x^2 + 4x$ c) $8x^2 + 7x + \frac{3}{4}$

Correction

a) $4x^2 - 5 = 0 \iff x^2 = \dfrac{5}{4} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{4}} \overset{\text{amplifier}}{\underset{\text{ou simplifier}}{\iff}} x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Donc $Z = \left\{\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) $3x^2 + 4x = 0 \iff x(3x+4) = 0 \overset{\text{propriété}}{\underset{\text{du produit}}{\iff}} x = 0 \text{ ou } x = -\dfrac{4}{3}$

Donc $Z = \left\{0, -\dfrac{4}{3}\right\}$.

c) On a $\Delta = 49 - 24 = 25$.

Ainsi $8x^2 + 7x + \frac{3}{4} = 0 \overset{\text{Viète}}{\iff} x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{25}}{16}$.

Donc $Z = \left\{\dfrac{-1}{8}, \dfrac{-3}{4}\right\}$.

♡ **Exercice 17 : factorisation de polynômes de degré 2** (3 fois 5 minutes)

1. Calculer les discriminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 des trois polynômes suivants et factoriser les polynômes qui sont factorisables dans $\mathbb{R}$.

$$p_1(x) = \tfrac{7}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} \qquad p_2(x) = \tfrac{7}{2}x^2 + 4x + \tfrac{1}{2} \qquad p_3(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - \tfrac{9}{2}$$

Correction

$\Delta_1 = 1 - 7 < 0 \implies p_1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$
$\Delta_2 = 16 - 7 = 9 \implies p_2$ se factorise dans $\mathbb{R}$
$\Delta_3 = 9 - 9 = 0 \implies p_3$ se factorise dans $\mathbb{R}$ grâce à une identité remarquable

Les zéros de p_2 sont $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{9}}{7}$. Ainsi $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{-1}{7}$.

$$p_2(x) = \tfrac{7}{2}\,(x+1)\,\left(x + \tfrac{1}{7}\right)$$

Vérifier les factorisations !

Pour p_3, on a $p_3(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2$

2. Calculer les discriminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 des trois polynômes suivants et factoriser les polynômes qui sont factorisables dans $\mathbb{R}$.

$$p_1(x) = -\tfrac{7}{4}x^2 + 4x - 8 \qquad p_2(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 4 \qquad p_3(x) = \tfrac{7}{4}x^2 + 8x + 4$$

Correction

$\Delta_1 = 16 - 56 < 0 \implies p_1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$
$\Delta_2 = 4 - 4 = 0 \implies p_2$ se factorise dans $\mathbb{R}$ grâce à une identité remarquable
$\Delta_3 = 64 - 28 = 36 \implies p_3$ se factorise dans $\mathbb{R}$

Les zéros de p_3 sont $x_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{36}}{\frac{7}{2}}$. Ainsi $x_1 = -4$, $x_2 = \dfrac{-4}{7}$.

$$p_3(x) = \tfrac{7}{4}\,(x+4)\,\left(x + \tfrac{4}{7}\right)$$

Vérifier les factorisations !

Pour p_2, on a $p_2(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2$

3. Calculer les discriminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 des trois polynômes suivants et factoriser les polynômes qui sont factorisables dans $\mathbb{R}$.

$$p_1(x) = -3x^2 + 3x - \tfrac{3}{4} \qquad p_2(x) = 5x^2 - 3x + \tfrac{1}{4} \qquad p_3(x) = 5x^2 + x + \tfrac{3}{4}$$

Correction

$\Delta_1 = 9 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_1$ se factorise dans $\mathbb{R}$ grâce à une identité remarquable
$\Delta_2 = 9 - 5 = 4 \quad \Longrightarrow \quad p_2$ se factorise dans $\mathbb{R}$
$\Delta_3 = 1 - 15 < 0 \quad \Longrightarrow \quad p_3$ est irréductible dans $\mathbb{R}$

Les zéros de p_2 sont $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{4}}{10}$. Ainsi $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{10}$.

$$p_2(x) = 5\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{10}\right)$$

Vérifier les factorisations !

Pour p_1, on a $p_1(x) = -3(x - \frac{1}{2})^2$

♡ **Exercice 18 : sur la piste de la preuve de la formule de Viète** (3 fois 5 minutes)

1. Factoriser le polynôme suivant en passant par sa forme canonique et vérifier ses zéros grâce à la formule de Viète.
$$p(x) = -3x^2 + 7x - 1$$

Correction

$$= -3\left(x^2 - \tfrac{7}{3}x + \tfrac{1}{3}\right)$$

$$= -3\left(\left(x - \tfrac{7}{6}\right)^2 - \tfrac{49}{36} + \tfrac{1}{3}\right) = -3\left(\left(x - \tfrac{7}{6}\right)^2 - \tfrac{37}{36}\right)$$

$$= -3\left(\left(x - \frac{7}{6}\right) - \frac{\sqrt{37}}{6}\right)\left(\left(x - \frac{7}{6}\right) + \frac{\sqrt{37}}{6}\right)$$

$$= -3\left(x - \frac{7+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{37}}{6}\right)$$

Vérification par la formule de Viète

Le discriminant vaut $\Delta = 49 - 12 = 37$. Les zéros de p sont $\dfrac{-7 \pm \sqrt{37}}{-6} = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$.

2. Factoriser le polynôme suivant en passant par sa forme canonique et vérifier ses zéros grâce à la formule de Viète.

$$p(x) = 2x^2 - 5x - 1$$

Correction

$$= 2\Big(x^2 - \tfrac{5}{2}x - \tfrac{1}{2}\Big)$$

$$= 2\Big(\big(x - \tfrac{5}{4}\big)^2 - \tfrac{25}{16} - \tfrac{1}{2}\Big) = 2\Big(\big(x - \tfrac{5}{4}\big)^2 - \tfrac{33}{16}\Big)$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{\sqrt{33}}{4}\right)\left(\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{\sqrt{33}}{4}\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{33}}{4}\right)$$

Vérification par la formule de Viète

Le discriminant vaut $\Delta = 25 + 8 = 33$. Les zéros de p sont $\dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$.

3. Factoriser le polynôme suivant en passant par sa forme canonique et vérifier ses zéros grâce à la formule de Viète.

$$p(x) = 4x^2 + 9x + 4$$

Correction

$$= 4\Big(x^2 + \tfrac{9}{4}x + 1\Big)$$

$$= 4\Big(\big(x + \tfrac{9}{8}\big)^2 - \tfrac{81}{64} + 1\Big) = 4\Big(\big(x + \tfrac{9}{8}\big)^2 - \tfrac{17}{64}\Big)$$

$$= 4\left(\left(x + \frac{9}{8}\right) - \frac{\sqrt{17}}{8}\right)\left(\left(x + \frac{9}{8}\right) + \frac{\sqrt{17}}{8}\right)$$

$$= 4\left(x - \frac{-9+\sqrt{17}}{8}\right)\left(x - \frac{-9-\sqrt{17}}{8}\right)$$

Vérification par la formule de Viète

Le discriminant vaut $\Delta = 81 - 64 = 17$. Les zéros de p sont $\dfrac{-9 \pm \sqrt{17}}{8}$.

1.3 Factorisations de fractions algébriques

♡ **Exercice 19 : factorisations - fractions algébriques** (3 fois 5 minutes)

1. Factoriser l'expression suivante. Les polynômes de degré 2 doivent se factoriser à l'œil.

$$\frac{3(x-2)}{x+4}-\frac{(x-2)^2}{x^2+8x+16}$$

Correction

$$\underset{\text{remarquable}}{\overset{\text{identité}}{=}} \frac{3(x-2)}{x+4}-\frac{(x-2)^2}{(x+4)^2}$$

$$\underset{\text{soustraire}}{\overset{\text{amplifier}}{=}} \frac{3(x-2)(x+4)\ -\ (x-2)^2}{(x+4)^2}$$

$$\underset{\text{par }(x-2)}{\overset{\text{factoriser}}{=}} \frac{(x-2)\Big(3(x+4)\ -\ (x-2)\Big)}{(x+4)^2}$$

$$\underset{\text{à 2 doigts}}{\overset{\text{développer}}{=}} \frac{(x-2)(2x+14)}{(x+4)^2}$$

2. Factoriser l'expression suivante. Les polynômes de degré 2 doivent se factoriser à l'œil.

$$\frac{4x^3+4x^2-9x-9}{4x^2+12x+9}$$

Correction

$$\underset{\text{en évidence}}{\overset{\text{facteur }(x+1)}{=}} \frac{4x^2(x+1)-9(x+1)}{4x^2+12x+9}$$

$$\underset{\text{par }(x+1)}{\overset{\text{factoriser}}{=}} \frac{(4x^2-9)(x+1)}{4x^2+12x+9}$$

$$\underset{\text{remarquables}}{\overset{\text{identités}}{=}} \frac{(2x-3)(2x+3)(x+1)}{(2x+3)^2}$$

$$\underset{(2x+3)}{\overset{\text{simplifier par}}{=}} \frac{(2x-3)(x+1)}{(2x+3)}$$

3. Factoriser l'expression $\dfrac{\dfrac{4x+3}{x-1}}{\dfrac{2x+5}{(x-1)^2}-\dfrac{2x+5}{x-1}}$.

Correction

$$\overset{\text{on veut une fraction}}{\underset{\text{au dénominateur}}{=}} \dfrac{\dfrac{4x+3}{x-1}}{\dfrac{(2x+5)-(2x+5)(x-1)}{(x-1)^2}}$$

$$\overset{\text{diviser revient à}}{\underset{\text{multiplier par l'inverse}}{=}} \frac{4x+3}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{(2x+5)-(2x+5)(x-1)}$$

$$\overset{\text{factoriser}}{\underset{\text{par }(2x+5)}{=}} \frac{4x+3}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{(2x+5)\Big(1-(x-1)\Big)}$$

$$\overset{\text{simplifier la fraction}}{\underset{\text{et la parenthèse}}{=}} \frac{(4x+3)(x-1)}{(2x+5)(2-x)}$$

♡ **Exercice 20 : factorisations - fractions algébriques** (4 fois 5 minutes)

1. Factoriser l'expression suivante. Les polynômes de degré 2 doivent se factoriser à l'œil.

$$\frac{(x+2)^2}{(8x+7)(x+4)}-\frac{x+2}{(x+4)^2}$$

Correction

$$\overset{\text{amplifier}}{\underset{\text{soustraire}}{=}} \frac{(x+2)^2(x+4)\ -\ (x+2)(8x+7)}{(8x+7)(x+4)^2}$$

$$\overset{\text{factoriser}}{\underset{\text{par }(x+2)}{=}} \frac{(x+2)\Big((x+2)(x+4)\ -\ (8x+7)\Big)}{(8x+7)(x+4)^2}$$

$$\overset{\text{développer}}{\underset{\text{à 2 doigts}}{=}} \frac{(x+2)\Big(x^2-2x+1\Big)}{(8x+7)(x+4)^2}$$

$$\overset{\text{identité}}{\underset{\text{remarquable}}{=}} \frac{(x+2)(x-1)^2}{(8x+7)(x+4)^2}$$

2. Factoriser l'expression suivante. Les polynômes de degré 2 doivent se factoriser à l'œil.

$$\frac{(x+3)(x-4)}{7-14x} - \frac{x+3}{x-4}$$

Correction

$$\overset{\text{amplifier}}{\underset{\text{soustraire}}{=}} \frac{(x+3)(x-4)^2 \;-\; (x+3)(7-14x)}{(7-14x)(x-4)}$$

$$\overset{\text{factoriser}}{\underset{\text{par } (x+3)}{=}} \frac{(x+3)\Big((x-4)^2 \;-\; (7-14x)\Big)}{(7-14x)(x-4)}$$

$$\overset{\text{développer}}{\underset{\text{à 2 doigts}}{=}} \frac{(x+3)\Big(x^2+6x+9\Big)}{(7-14x)(x-4)}$$

$$\overset{\text{identité}}{\underset{\text{remarquable}}{=}} \frac{(x+3)^3}{(7-14x)(x-4)}$$

3. Factoriser l'expression suivante. Les polynômes de degré 2 doivent se factoriser à l'œil.

$$\frac{(x+3)(x+2)}{(x+4)^2} - \frac{x+3}{(x+2)(x+4)}$$

Correction

$$\overset{\text{amplifier}}{\underset{\text{soustraire}}{=}} \frac{(x+3)(x+2)(x+2) \;-\; (x+3)(x+4)}{(x+2)(x+4)^2}$$

$$\overset{\text{factoriser}}{\underset{\text{par } (x+3)}{=}} \frac{(x+3)\Big((x+2)(x+2) \;-\; (x+4)\Big)}{(x+2)(x+4)^2}$$

$$\overset{\text{développer}}{\underset{\text{identité remarquable}}{=}} \frac{(x+3)\Big(x^2+3x\Big)}{(x+2)(x+4)^2}$$

$$\overset{\text{factorisation}}{\underset{\text{évidente}}{=}} \frac{x(x+3)^2}{(x+2)(x+4)^2}$$

4. Factoriser l'expression suivante. Les polynômes de degré 2 doivent se factoriser à l'œil.

$$\frac{5(x+3)}{x-6}-\frac{(x+3)^2}{x^2-12x+36}$$

Correction

$$\overset{\text{identité}}{\underset{\text{remarquable}}{=}} \frac{5(x+3)}{x-6}-\frac{(x+3)^2}{(x-6)^2}$$

$$\overset{\text{amplifier}}{\underset{\text{soustraire}}{=}} \frac{5(x+3)(x-6)\ -\ (x+3)^2}{(x-6)^2}$$

$$\overset{\text{factoriser}}{\underset{\text{par }(x+3)}{=}} \frac{(x+3)\Big(5(x-6)\ -\ (x+3)\Big)}{(x-6)^2}$$

$$\overset{\text{développer}}{\underset{\text{à 2 doigts}}{=}} \frac{(x+3)(4x-33)}{(x-6)^2}$$

1.4 Factorisation de polynômes de degré plus grand que deux

♡ **Exercice 21 : évaluation et factorisation de polynômes** (2 fois 5 minutes)

1. Évaluer le polynôme $p(x) = 3x^3 - 22x^2 + 1$ en $x = 7$ de deux manières différentes.

   a) Par division euclidienne. b) Grâce au schéma de Horner.

Correction

a) Par division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & -22x^2 & & +\ 1 & x-7 \\ \cline{5-5} -(3x^3 & -21x^2) & & & 3x^2-x-7 \\ \cline{1-2} & -x^2 & & +\ 1 & \\ & -(-x^2 & +\ 7x) & & \\ \cline{2-3} & & -7x & +\ 1 & \\ & & -(-7x & +49) & \\ \cline{3-4} & & & -48 & \end{array}$$

b) Par Horner

3	−22	0	1	7
0	21	−7	−49	
3	−1	−7	−48	

Vérifier à deux doigts !

On a, dans les deux cas : $p(x) = (x-7)(3x^2 - x - 7) - 48.$

Ainsi, en posant $x = 7$, on a : $p(7) = -48.$

2. On considère le polynôme $p(x) = 2x^4 - 12x^2 - 17x - 3$.

   a) Que dit le lemme de Gauss (précisément pour ce polynôme) ?

   b) Sachant que $p(3) = 0$, effectuer une étape de factorisation sur $p(x)$.

Correction

a) Que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \left\{ \pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2} \right\}$.

b) Par Horner

2	0	−12	−17	−3	3
0	6	18	18	3	
2	6	6	1	0	

Donc, on a la factorisation $p(x) = (x-3)(2x^3 + 6x^2 + 6x + 1)$

Vérifier la factorisation !

♡ **Exercice 22 : évaluation de polynômes** (4 fois 5 minutes)

1. Évaluer le polynôme $p(x) = 2x^3 - 27x + 4$ en $x = 4$ de deux manières différentes.

   a) Par division euclidienne. b) Grâce au schéma de Horner.

Correction

a) Par division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & & -27x+ & 4 & x-4 \\ \cline{5-5}
-(2x^3 & -8x^2\ ) & & & 2x^2+8x+5 \\ \cline{1-2}
 & 8x^2 & -27x+ & 4 & \\
 & -\ (8x^2 & -32x\ ) & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x+ & 4 & \\
 & & -\ (\ 5x & -20) & \\ \cline{3-4}
 & & & 24 &
\end{array}$$

b) Par Horner

2	0	−27	4	4
0	8	32	20	
2	8	5	24	

Vérifier à deux doigts !

On a, dans les deux cas : $p(x) = (x-4)(2x^2+8x+5)+24.$

Ainsi, en posant $x = 4$, on a : $p(4) = 24.$

2. Évaluer le polynôme $p(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12$ en $x = 3$ de deux manières différentes.

   a) Par division euclidienne. b) Grâce au schéma de Horner.

Correction

a) Par division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3- & 9x^2 & & -12 & x-3 \\ \cline{5-5}
-(4x^3 & -12x^2\ ) & & & 4x^2+3x+9 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & & -12 & \\
 & -\ (\ 3x^2 & -9x\ ) & & \\ \cline{2-3}
 & & 9x & -12 & \\
 & & -\ (9x & -27) & \\ \cline{3-4}
 & & & 15 &
\end{array}$$

b) Par Horner

4	−9	0	−12	3
0	12	9	27	
4	3	9	15	

Vérifier à deux doigts !

On a, dans les deux cas : $p(x) = (x-3)(4x^2+3x+9)+15.$

Ainsi, en posant $x = 3$, on a : $p(3) = 15.$

♡ **Exercice 23 : lemme de Gauss et factorisation** (4 fois 5 minutes)

1. On considère le polynôme $p(x) = 3x^4 + 4x^3 + 9x + 2$.
   a) Que dit le lemme de Gauss (précisément pour ce polynôme) ?
   b) Sachant que $p(-2) = 0$, effectuer une étape de factorisation sur $p(x)$.

Correction

a) Que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \left\{ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3} \right\}$.

b) Par Horner

3	4	0	9	2	-2
0	-6	4	-8	-2	
3	-2	4	1	0	

Donc, on a la factorisation $p(x) = (x+2)(3x^3 - 2x^2 + 4x + 1)$

Vérifier la factorisation !

2. On considère le polynôme $p(x) = 5x^4 + 13x^3 + 19x + 3$.
   a) Que dit le lemme de Gauss (précisément pour ce polynôme) ?
   b) Sachant que $p(-3) = 0$, effectuer une étape de factorisation sur $p(x)$.

Correction

a) Que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \left\{ \pm 1,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{5},\ \pm\frac{3}{5} \right\}$.

b) Par Horner

5	13	0	19	3	-3
0	-15	6	-18	-3	
5	-2	6	1	0	

Donc, on a la factorisation $p(x) = (x+3)(5x^3 - 2x^2 + 6x + 1)$

Vérifier la factorisation !

Factorisations par Gauss, Horner et Viète

Résolution de l'exercice 24

1. En prenant une valeur de x qui est négative, on s'aperçoit que le polynôme donne forcément un nombre positif, qui ne peut donc pas être égal à 0.

   Gauss donne l'impression de ne donner que ± 1 comme potentielles solutions rationnelles, et selon la remarque ci-dessus, il ne reste plus que 1 qui, après vérification, n'est pas une solution de l'équation.

   Or, le lemme de Gauss ne fonctionne que si le polynôme est à coefficients entiers, ce n'est pas le cas ici, car deux coefficients valent $-\frac{5}{2}$. Il faut donc multiplier l'équation par 2 pour obtenir un polynôme à coefficients entiers

   $$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$$

   Maintenant le lemme de Gauss donne $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}$ comme potentielles solutions rationnelles. On se souvient que x doit être positif et que 1 n'était pas une solution, il ne reste plus que 2 et $\frac{1}{2}$. Il se trouve que ces deux nombres sont solutions (c'est une coïncidence), mais pour appliquer Gauss et Horner efficacement, il est important de factoriser dès qu'on a trouvé une solution.

   Quel que soit notre choix, on arrive à la même factorisation finale.

   (a) En prenant 2 comme solution, on a la factorisation $(x-2)(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$.
   En factorisant par groupement, on obtient la factorisation suivante.

   $$(x-2)(x^2+1)(2x-1) = (x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

   (b) En prenant $\frac{1}{2}$ comme solution, on a la factorisation $(x - \frac{1}{2})(2x^3 - 4x^2 + 2x - 4)$.
   En factorisant par groupement, on obtient la factorisation suivante.

   $$(x - \tfrac{1}{2})(2x^2+2)(2x-1) = (2x-1)(x-2)(x^2+1)$$

   Dans les deux cas, l'équation est la suivante, et on termine la résolution en utilisant la propriété du produit.

   $$(x-2)(2x-1)(x^2+1) = 0$$

   Comme x^2+1 ne s'annule pas (soit on remarque que, comme $x^2 \geqslant 0$, alors $x^2 + 1 \geqslant 1$; soit on remarque que son discriminant est négatif, car il vaut $\Delta = 0 - 4$), alors l'ensemble de solution est

   $$S = \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

2. La réponse à la question est négative.

   On doit mettre $\frac{1}{2}$ en facteur pour pouvoir appliquer le lemme de Gauss. On trouve la factorisation

   $$\tfrac{1}{2}\big(2x^3 + 3x^2 + 5x + 2\big) = \tfrac{1}{2}(2x+1)(x^2+x+2)$$

   Pour les élèves non scientifique la factorisation s'arrête là car le discriminant de $x^2 + x + 2$ est négatif.

1.5 Résolution de systèmes d'équations

Résolution de l'exercice 25

a) $S = \{(2;3)\}$ b) $S = \{(-1;15)\}$ c) $S = \{(-3;7)\}$

1.6 Résolution d'équations avec racines et valeurs absolues

Résolution de l'exercice 26

a) On isole la racine carrée, et on élève au carré chaque membre de l'équation, après avoir tout passé du même côté (pour avoir un membre de l'équation qui vaut 0), on obtient

$$3x^2 - 38x + 64 = 0$$

Par Viète, on trouve les solutions $x = \frac{32}{3}$ et $x = 2$. En vérifiant ces solutions, on s'aperçoit que $S = \{\frac{32}{3}\}$.

b) On isole la racine carrée, et on élève au carré chaque membre de l'équation. Après avoir tout passé du même côté (pour avoir un membre de l'équation qui vaut 0), on obtient

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

Par Viète, on trouve les solutions $x = 5$ et $x = 7$. En vérifiant ces solutions, on s'aperçoit que $S = \emptyset$.

1.7 Résolution d'inéquations et tableaux de signes

Réponse de l'exercice 31

a) Les trois facteurs sont x, $x+2$, $x-3$

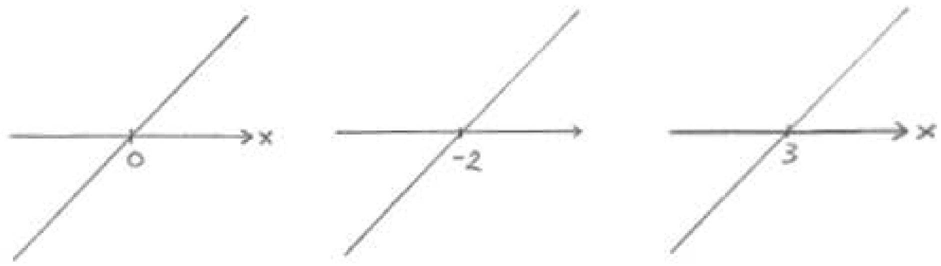
On calcule leurs zéros

x s'annule en 0 $(x=0)$

$x+2$ s'annule en -2 $(x+2=0 \Leftrightarrow x=-2)$

$x-3$ s'annule en 3 $(x-3=0 \Leftrightarrow x=3)$

On esquisse leurs graphes et on visualise leurs tableaux de signes



	0	
−	0	+

	−2	
−	0	+

	3	
−	0	+

Le tableau de signe est

x		−2		0		3	
x	−	−	−	0	+	+	+
x+2	−	0	+	+	+	+	+
x−3	−	−	−	−	−	0	+
	−	0	+	0	−	↯	+

Réponse

	−2		0		3	
−	0	+	0	−	↯	+

b) Les trois facteurs sont x^2, x^2+4, x^2-9

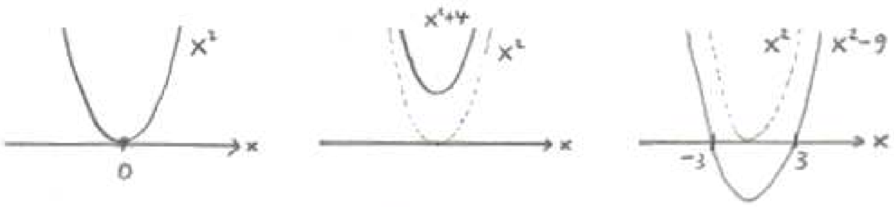
On calcule leurs zéros

x^2 s'annule en 0 ($x^2=0 \Leftrightarrow x=0$)

x^2+4 ne s'annule pas ($x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4$ impossible)
donc x^2+4 est soit toujours positif, soit toujours négatif !

x^2-9 s'annule en ± 3 ($x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$)

On esquisse leurs graphes et on visualise leurs tableaux de signes



	0	
+	0	+

+

	-3		3	
+	0	−	0	+

Le tableau de signes est

		-3		0		3	
x^2	+	+	+	0	+	+	+
x^2+4	+	+	+	+	+	+	+
x^2-9	+	0	−	−	−	0	+
	+	ϟ	−	0	−	ϟ	+

Réponse

	-3		0		3	
+	ϟ	−	0	−	ϟ	+

c) Les trois facteurs sont x^3, x^3+1, x^3-8

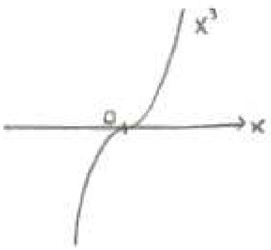
On calcule leurs zéros

x^3 s'annule en 0 $\left(x^3=0 \Leftrightarrow x=0\right)$

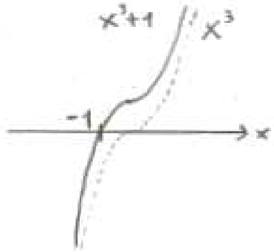
x^3+1 s'annule en -1 $\left(x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1\right)$

x^3-8 s'annule en 2 $\left(x^3-8=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2\right)$

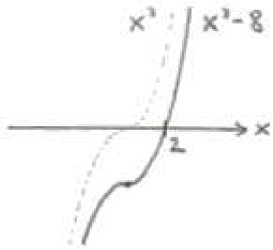
On esquisse leurs graphes et on visualise leurs tableaux de signes



	0	
−	0	+



	−1	
−	0	+



	2	
−	0	+

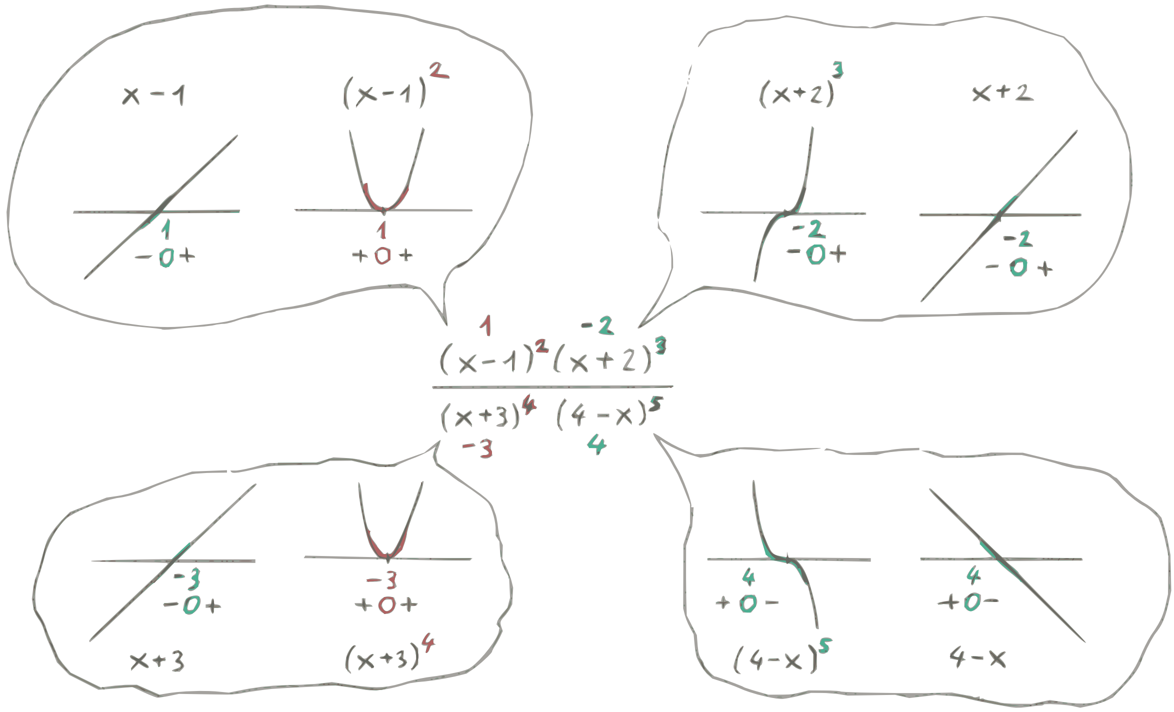
Le tableau de signes est

x		−1		0		2	
x^3	−	−	−	0	+	+	+
x^3+1	−	0	+	+	+	+	+
x^3-8	−	−	−	−	−	0	+
	−	0	+	0	−	$//$	+

Réponse

	−1		0		2	
−	0	+	0	−	$//$	+

d) Autre manière de rédiger



	−3		−2		1		4	
−	↯	−	0	+	0	+	↯	−

+ −   + −   + +   + +   + +
+ +   + +   + +   + +   + −

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Le signe en haut à gauche correspond au facteur en haut à gauche
Le signe en haut à droite correspond au facteur en haut à droite
Le signe en bas à gauche correspond au facteur en bas à gauche
Le signe en bas à droite correspond au facteur en bas à droite

Résolution de l'exercice 32

a) La fonction est factorisée, on peut directement faire son tableau de signes.

	-2		-1		0		2		3	
$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$

b) La fonction est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

Même si $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$, il n'y a pas besoin de faire cette factorisation, car on peut visualiser que le graphe de x^3-8 s'annule et change de signe en $x=2$.

	-6		$-\frac{3}{5}$		0		$\frac{5}{3}$		2	
$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	$\lightning$	$+$	$\lightning$	$-$

c) La fonction est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

Même si $1-x^3=(1-x)(x^2+x+1)$, il n'y a pas besoin de faire cette factorisation, car on peut visualiser que le graphe de x^3-1 s'annule et change de signe en $x=1$.

	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{8}{5}$	
$-$	0	$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$

d) La fonction est suffisamment factorisée pour faire son tableau de signes.

Même si $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$, il n'y a pas besoin de faire cette factorisation, car on peut visualiser que le graphe de x^2-4x-5 est une parabole qui s'annule et change de signe en ses deux zéros $x=5$ et $x=-1$. Quant à $-x^2+4x-5$, son discriminant est négatif et la parabole est orientée vers le bas, ce facteur est donc toujours négatif !

	$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{2}{3}$		5	
$-$	$\lightning$	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$

Résolution d'inéquations grâce au tableau de signes

♡ **Exercice 33 : résolution d'inéquation** (6 fois 5 minutes)

Résoudre les inéquations suivantes.

a) Résoudre l'inéquation
$$\frac{(x-3)^2\,(x^2+1)}{(x-4)\,(x+1)^2} \geqslant 0$$

Correction

Voici le tableau de signes

	-1		3		4	
$-$	ϟ	$-$	0	$-$	ϟ	$+$

$+\ +$ $\quad$ $+\ +$
$-\ +$ $\quad$ $+\ +$

vérifier les signes à l'autre bout !

L'ensemble de solutions est :
$$S = \{\,3\,\} \cup \,]\,4, +\infty\,[$$

b) Résoudre l'inéquation
$$\frac{(2x-1)\,(x+3)^2}{(x^2+3)\,(3-2x)} \geqslant 0$$

Correction

Voici le tableau de signes

	-3		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$-$	0	$-$	0	$+$	ϟ	$-$

$-\ +$ $\quad$ $+\ +$
$+\ +$ $\quad$ $+\ -$

vérifier les signes à l'autre bout !

L'ensemble de solutions est :
$$S = \{\,-3\,\} \cup \left[\,\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\,\right[$$

c) Résoudre l'inéquation

$$\frac{(3x-2)^2\,(x+2)^3}{(1-3x)\,(x^2+2)} \leqslant 0$$

Correction

Voici le tableau de signes

	-2		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	
$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$	0	$-$

$+ \; -$ $\qquad$ $+ \; +$
$+ \; +$ $\qquad$ $- \; +$

L'ensemble de solutions est :

vérifier les signes à l'autre bout !

$$S = \left]-\infty,-2\right] \cup \left]\tfrac{1}{3},+\infty\right[$$

d) Résoudre l'inéquation

$$\frac{(x+3)^4\,(5-x)}{(5x^2+3)\,(x+2)^2} \leqslant 0$$

Correction

Voici le tableau de signes

	-3		-2		5	
$+$	0	$+$	$\lightning$	$+$	0	$-$

$+ \; +$ $\qquad$ $+ \; -$
$+ \; +$ $\qquad$ $+ \; +$

L'ensemble de solutions est :

vérifier les signes à l'autre bout !

$$S = \{-3\} \cup \left[5,+\infty\right[$$

e) Résoudre l'inéquation
$$\frac{(x-4)^2\,(x+3)^4}{(1-x)\,(3x^2+2)} \leqslant 0$$

Correction

Voici le tableau de signes

	-3		1		4	
$+$	0	$+$	↯	$-$	0	$-$

$+\ +$
$+\ +$

$+\ +$
$-\ +$

vérifier les signes à l'autre bout !

L'ensemble de solutions est :
$$S = \{\,-3\,\} \cup \,]\,1, +\infty\,[$$

f) Résoudre l'inéquation
$$\frac{(5x+4)^4\,(x^4+5)}{(x-3)\,(4-x)^3} \geqslant 0$$

Correction

Voici le tableau de signes

	$-\frac{4}{5}$		3		4	
$-$	0	$-$	↯	$+$	↯	$-$

$+\ +$
$-\ +$

$+\ +$
$+\ -$

vérifier les signes à l'autre bout !

L'ensemble de solutions est :
$$S = \{\,-\tfrac{4}{5}\,\} \cup \,]\,3, 4\,[$$

1.8 Résolutions d'inéquations

Résolution de l'exercice 34

a) On passe tout à gauche, on factorise et on obtient $(x-1)^2(x+2)$ dont le tableau de signes est

	-2		1	
$-$	0	$+$	0	$+$

b) On passe tout à gauche, on factorise et on obtient $(2x-1)(x^2-2x-1)$ dont le tableau de signes est

	$1-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$1+\sqrt{2}$	
$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

c) On passe tout à gauche, on factorise et on obtient $x(2x+1)(x^2+x+1)$ dont le tableau de signes est

	$-\frac{1}{2}$		0	
$+$	0	$-$	0	$+$

d) On passe tout à gauche, on factorise et on obtient $(2x-3)(x^2-2x+3)$ dont le tableau de signes est

	$\frac{3}{2}$	
$-$	0	$+$

Résolution de l'exercice 35

On passe tout à gauche, on factorise et on obtient

$$\frac{2(x+2)(2x^3-5x^2+1)}{(1-x)(x-3)^2} = \frac{2(x+2)(2x-1)(x^2-2x-1)}{(1-x)(x-3)^2}$$

dont le tableau de signes est

	-2		$1-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3	
$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$

Résolution de l'exercice 36

a) Inéquation équivalente : $\dfrac{x^3}{(3-x)(x+2)^2} \geqslant 0.$

Tableau de signes du membre de gauche

	-2		0		3	
$-$	$\lightning$	$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$

Ensemble de solutions : $S = [0, 3[$.

b) Inéquation équivalente : $\dfrac{x(x+1)(x^2+1)}{(2-x)(2+x)} < 0.$

Tableau de signes du membre de gauche

	-2		-1		0		2	
$-$	$\lightning$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\lightning$	$-$

Ensemble de solutions : $S =]-\infty, -2[\cup]-1, 0[\cup]2, +\infty[$.

Résolution de l'exercice 37

Inéquation équivalente : $(x^3+1)(x^3+2) \geqslant 0$.
Tableau de signes du membre de gauche

	$-\sqrt[3]{2}$		-1	
$+$	0	$-$	0	$+$

Ensemble de solutions : $S = \left]-\infty, -\sqrt[3]{2}\right] \cup [-1, +\infty[$.

Remarque : on peut factoriser $x^6 + 3x^3 + 2$ par Gauss/Horner. On trouve

$$(x+1)(x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$$

Le polynôme de degré 5 n'a qu'un zéro qui, de plus, est irrationnel, donc Gauss/Horner ne permet pas de continuer la factorisation ; on reconnait néanmoins une factorisation par groupement (soit avec 2 paquets de trois monômes, soit avec 3 paquets de deux mônomes) et on arrive à

$$(x+1)(x^3+2)(x^2-x+1)$$

Le polynôme de degré 2 est irréductible dans $\mathbb{R}$, car son discriminant est négatif. De plus, en mettant ensemble $(x+1)(x^2-x+1)$, on obtient la factorisation $(x^3+1)(x^3+2)$ que l'on obtient directement par Viète. Viète est toujours la meilleure idée lorsqu'on est face à un polynôme du deuxième degré camouflé (se référer à la section sur les polynômes du deuxième degré camouflés).

Résolution de l'exercice 38

Bon courage !

Résolution de l'exercice 39

Bon courage !

Résolution de l'exercice 40

Bon courage !

1.9 Déterminants en dimension 2 et 3

Résolution de l'exercice 41

a) -2 b) 2 c) 0 d) -8 e) 0

1.10 Mise en équations

1.11 Exponentielles et logarithmes

1.12 Équations bicarrées et du deuxième degré camouflées

Résolution de l'exercice 50

Pour factoriser x^4+1, on pose $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$, on résout (5 minutes) en commençant par développer pour trouver $(x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)$.

1.13 Trigonométrie : définitions et valeurs à connaître

♡ **Exercice 55 : cosinus, sinus et tangente d'angles particuliers** (4 fois 5 minutes)

1. a) Trouver les valeurs exactes des fonctions trigonométriques suivantes.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

b) Si $\sin(\alpha) = \frac{4}{5}$, que vaut $\cos(\alpha)$?

Correction

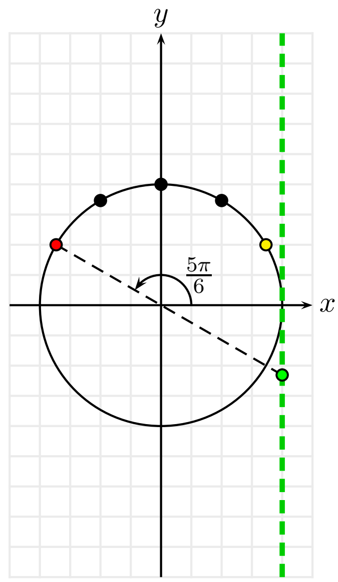
a) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Vérifiez de tête que $\cos^2(\frac{5\pi}{6}) + \sin^2(\frac{5\pi}{6}) = 1$

$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) Comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \pm\frac{3}{5}$$



2. a) Trouver les valeurs exactes des fonctions trigonométriques suivantes.

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right), \quad \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

b) Si $\cos(\alpha) = \frac{3}{4}$, que vaut $\sin(\alpha)$?

Correction

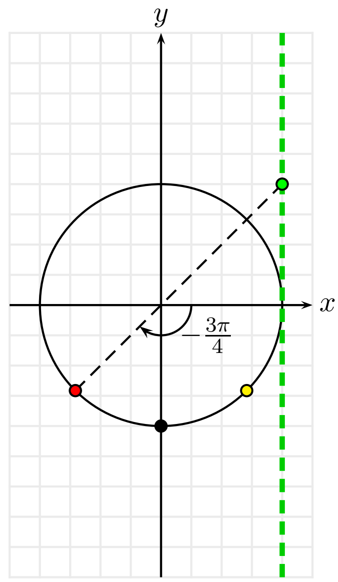
a) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vérifiez de tête que $\cos^2(-\frac{3\pi}{4}) + \sin^2(-\frac{3\pi}{4}) = 1$

$\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

b) Comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$



3. a) Trouver les valeurs exactes des fonctions trigonométriques suivantes.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

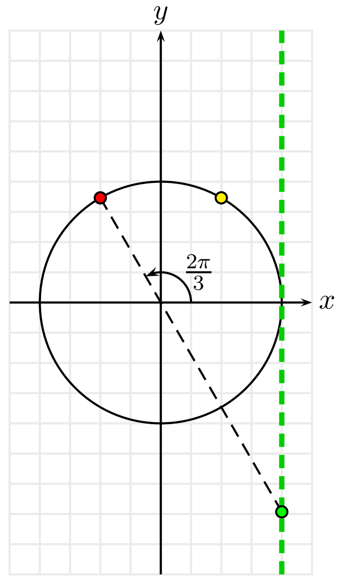
b) Si $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$, que vaut $\cos(\alpha)$?

Correction

a) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vérifiez de tête que $\cos^2(\frac{2\pi}{3}) + \sin^2(\frac{2\pi}{3}) = 1$

$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$



b) Comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

4. a) Trouver les valeurs exactes des fonctions trigonométriques suivantes.

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right), \quad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

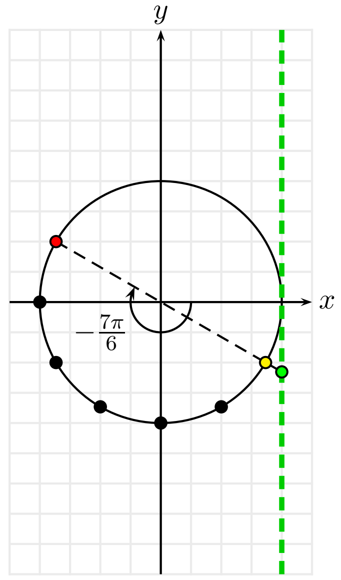
b) Si $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$, que vaut $\sin(\alpha)$?

Correction

a) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Vérifiez de tête que $\cos^2(-\frac{7\pi}{6}) + \sin^2(-\frac{7\pi}{6}) = 1$

$\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



b) Comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

5. a) Trouver les valeurs exactes des fonctions trigonométriques suivantes.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

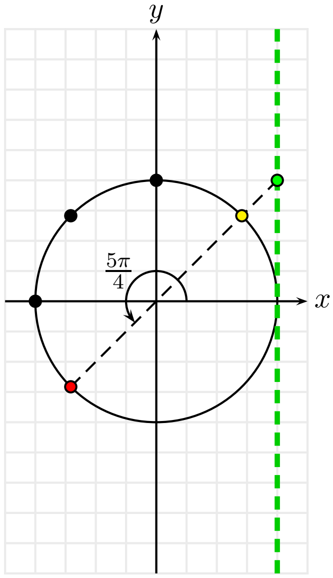
b) Si $\sin(\alpha) = \frac{1}{4}$, que vaut $\cos(\alpha)$?

Correction

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vérifiez de tête que $\cos^2(\frac{5\pi}{4}) + \sin^2(\frac{5\pi}{4}) = 1$

$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$



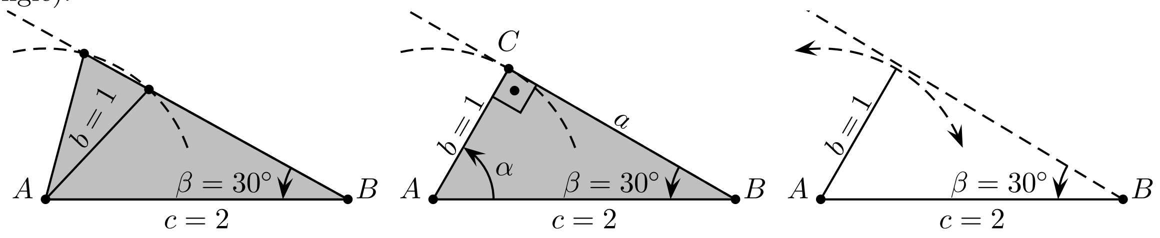
b) Comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \iff \cos(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

1.14 Problèmes de trigonométrie avec les triangles

Résolution de l'exercice 56

1. Le dessin à la main ne permet pas de conclure : pour une erreur d'un millième de degré, on passe de la situation où il y a deux triangles à celle où il n'y a pas de triangle (en passant par un unique triangle).

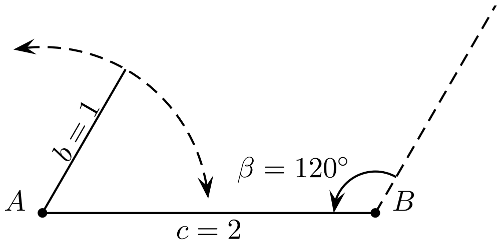


Seul le calcul peut décider :

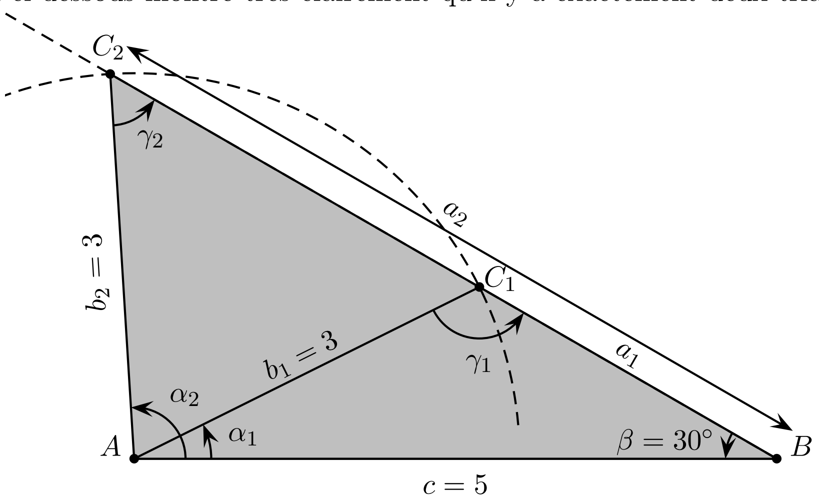
1. On peut chercher γ à l'aide du théorème du sinus, on trouve $\sin(\gamma)=1$, donc $\gamma=90°$.
2. On peut cherche a à l'aide du théorème du cosinus, on trouve $a=\sqrt{3}$.

Le triangle est donc assurément rectangle et on a $\alpha=60°$.

2. La construction ci-dessous montre qu'il est impossible d'avoir un tel triangle.



3. La construction ci-dessous montre très clairement qu'il y a exactement deux triangles.



On peut utiliser le théorème du cosinus ou celui du sinus.

Pour le petit triangle, on a $\gamma_1\cong 123.557°$, $\alpha_1\cong 26.443°$ et $a_1\cong 2.672$.

Pour le grand triangle, on a $\gamma_2\cong 56.443°$, $\alpha_2\cong 93.557°$ et $a_2\cong 5.988$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 57

Un schéma, «tan-opp-adj», l'arbre mesure 104 mètres (103.923).

Résolution de l'exercice 58

Un schéma, deux méthodes :

1. Trouver un des deux longs côtés du triangle quelconque, et utiliser «sin-opp-hyp» pour conclure.

   Les longueurs des côtés du triangle quelconque sont d'environ 43.979 et 24.140 mètres.

2. Trouver deux relations entre la distance entre la base de la tour et la deuxième position du point P et la hauteur de la tour avec «tan-opp-adj». Résoudre ces deux équations à deux inconnues.

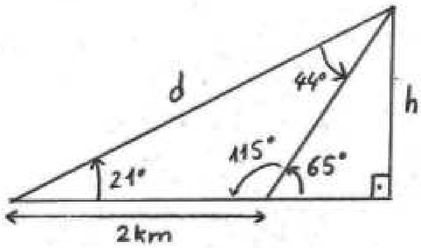
   La distance entre la base de la tour et la deuxième position du point P vaut 14.5 mètres (14.528).

La hauteur de la tour vaut 19.3 mètres (19.279).

Résolution de l'exercice 59

Faire un schéma (un triangle semblable à celui sur la donnée) qui correspond au moment où la balle touche le canard, t secondes après qu'il soit apparu au point A. Utiliser «sin-opp-hyp» et la réponse est $16.26°$.

Résolution de l'exercice 60



On complète des angles du triangle :
d'abord $115° = 180° - 65°$ (angle plat)
puis $44° = 180° - (21° + 115°)$
(somme des angles dans un triangle)

Par le théorème du sinus, on trouve d

$$\frac{d}{\sin(115°)} = \frac{2}{\sin(44°)} \iff d = \frac{2\sin(115°)}{\sin(44°)} \underset{\substack{\text{calc} \\ (d \text{ en mémoire})}}{\cong} 2.609\,\text{km}$$

Pour trouver h, on utilise « sin-opp-hyp » dans le grand triangle rectangle

$$\sin(21°) = \frac{h}{d} \iff h = d\sin(21°) \underset{\text{calc}}{\cong} 0.935\,\text{km}$$

Résolution de l'exercice 61

Faire un schéma (représenter la terre par un cercle, relier la station au centre du cercle et aussi à un point de tangence sur le cercle, le rayon de la terre sert à décrire deux côtés de ce triangle). Utiliser «sin-opp-hyp», isoler le rayon de la terre de l'équation et trouver la réponse de 6370 kilomètres (6370.05).

Résolution de l'exercice 62

Faire un schéma, chercher la hauteur d'un des cinq triangles isocèles avec «tan-opp-adj». Cette hauteur vaut 193 mètres (193.38). En déduire que l'aire vaut 135851 mètres carrés (135850.616).

Résolution de l'exercice 63

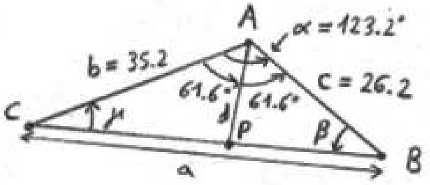
Pour trouver la hauteur h, on doit connaître soit c (la longueur de AB) et β (l'angle en B dans ABC), soit b (la longueur de AC) et γ (l'angle en C dans ABC).

En utilisant ce qu'on sait du triangle BCD, on peut facilement trouver l'angle en B (dans ce triangle). On en déduit β. En faisant de même dans le triangle BCE, on trouve γ.
On peut donc trouver soit c, soit b, car on connaît la longueur BC et tous les angles du triangle ABC.
On a tout pour trouver h qui est une cathète d'un triangle rectangle.

Réponses intermédiaires (il ne faut pas tout trouver bien évidemment).

$\beta \cong 72.262°$, $\gamma \cong 75.707°$, $\alpha \cong 32.031°$, $c \cong 336.186$, $b \cong 330.431$ et $h \cong 320.203$ mètres.

Résolution de l'exercice 64



Par le théorème du cosinus, on trouve a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$\overset{a>0}{\Longleftrightarrow} \quad a = \sqrt{35.2^2 + 26.2^2 - 2 \cdot 35.2 \cdot 26.2\cos(123.2°)} \underset{\substack{\text{calc} \\ \text{(a en mémoire)}}}{\cong} 54.180$$

Par le théorème du sinus dans le grand triangle, on trouve μ

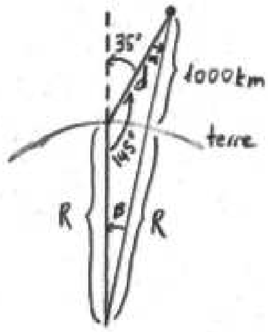
$$\frac{\sin(\mu)}{26.2} = \frac{\sin(123.2°)}{a} \Longleftrightarrow \sin(\mu) = \frac{26.2\sin(123.2°)}{a} \underset{\boxed{\sin^{-1}}}{\overset{\mu \text{ aigu}}{\Longleftrightarrow}} \mu \cong 23.868°$$

Comme la somme des angles dans le triangle APC vaut 180°, on trouve que l'angle $\widehat{APC}$ vaut environ 94.532° (on a utilisé le fait que la bissectrice coupe l'angle α en 2 parties égales).

Par le théorème du sinus, on trouve d

$$\frac{d}{\sin(\mu)} = \frac{b}{\sin(\widehat{APC})} \Longleftrightarrow d = \frac{b \cdot \sin(\mu)}{\sin(\widehat{APC})} \underset{\text{calc.}}{\cong} 14.288$$

Résolution de l'exercice 65



Soit on cherche d directement par le théorème du cosinus

$$(1000+R)^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos(145°)$$
$$\iff d^2 - 12740\cos(145°)d - 13740000 = 0$$
$$\overset{\text{Viète}}{\iff} \ldots \iff d \cong 1182.588 \text{ km} \quad (\text{ou } -11618.585\text{km : impossible})$$

Soit on cherche l'angle α (qui est aigu) avec le théorème du sinus, puis β puis d avec le théorème du sinus

$$\frac{\sin(\alpha)}{R} = \frac{\sin(145°)}{1000+R} \iff \sin(\alpha) = \frac{R\sin(145°)}{1000+R} \underset{\boxed{\sin^{-1}}}{\overset{\alpha \text{ aigu}}{\iff}} \alpha \cong 29.719°$$

Comme la somme des angles vaut 180°, on a $\beta \cong 5.281°$

$$\frac{d}{\sin(\beta)} = \frac{R}{\sin(\alpha)} \iff d = \frac{R\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cong 1182.588\text{ km}$$

Résolution de l'exercice 67

4. Hypothèse 1 : $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b}$.

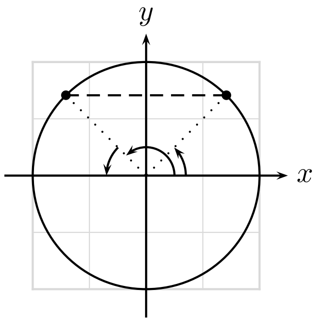
En utilisant $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, on a

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b} \iff \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{b}$$

Le théorème du sinus dit que $\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b}$. On en déduit donc que

$$\sin(\beta) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)$$

Le schéma suivant montre que deux cas sont possibles.



1er cas Les angles sont les mêmes. On a $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, c'est-à-dire que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, donc que $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

2e cas La somme des angles vaut π. On a $\beta + (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \pi$, c'est-à-dire que $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, donc $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$.

L'hypothèse 2, $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ qui est la même que l'hypothèse 1, à part le fait que les rôles de a et b, et de α et β sont échangés. Ainsi, on en déduit les mêmes deux cas que précédemment (où les rôles de a et b, et de α et β sont échangés).

3e cas $\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, donc que $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

4e cas on a $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$, donc $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\beta$.

Les cas 2 et 4 sont évidemment incompatibles (car $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ ne peuvent pas être vraies en même temps puisque β ne peut pas être à la fois plus grand et plus petit que α).

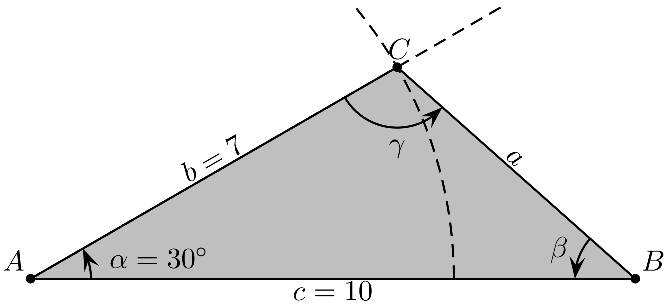
Les cas 1 et 4 sont évidemment incompatibles (car $\gamma = \frac{\pi}{2}$ et $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\beta$ ne peuvent pas être vraies en même temps puisque β n'est pas nul).

Les cas 2 et 3 sont évidemment incompatibles (raison similaire à la ligne précédente).

Ainsi la situation est celle des cas 1 et 3, et on a montré que $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Cqfd !

Résolution de l'exercice 68

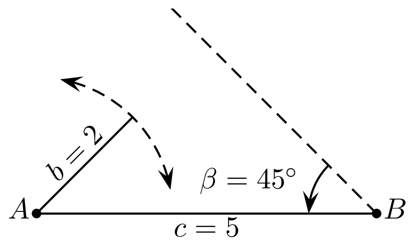
1. La construction ci-dessous montre qu'il ne peut y avoir qu'un seul triangle.



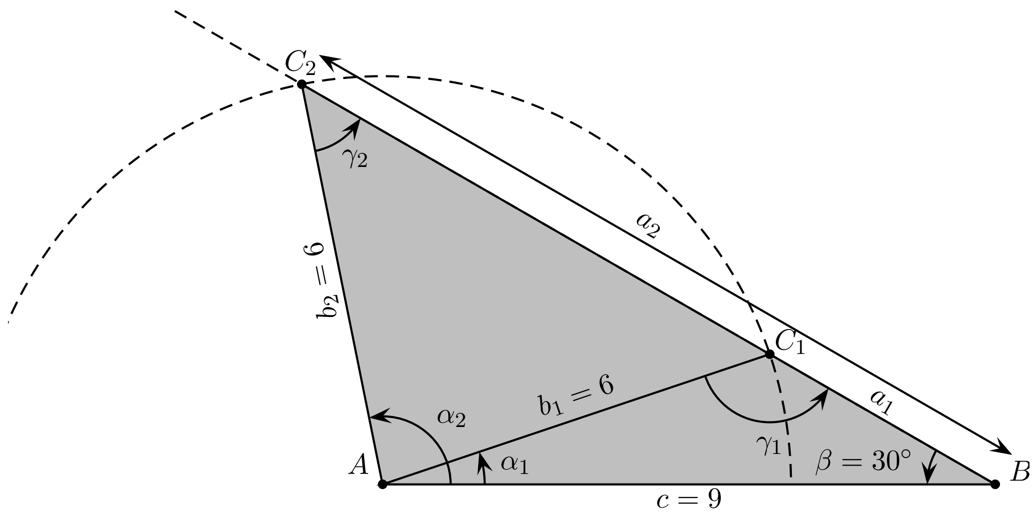
On trouve, grâce au théorème du cosinus, que $a \cong 5.268$.
On trouve, grâce au théorème du sinus (et à la connaissance de a), que $\beta \cong 41.631°$.
On trouve γ grâce à la somme des angles : $\gamma \cong 108.369°$.

Attention : en cherchant γ avec le théorème du sinus, la touche $\boxed{\sin^{-1}}$ aurait donné un angle aigu, alors qu'on cherche un angle obtus, donc $\gamma = 180° - \sin^{-1}(\frac{5}{a})$.

2. La construction ci-dessous montre qu'il est impossible d'avoir un tel triangle.



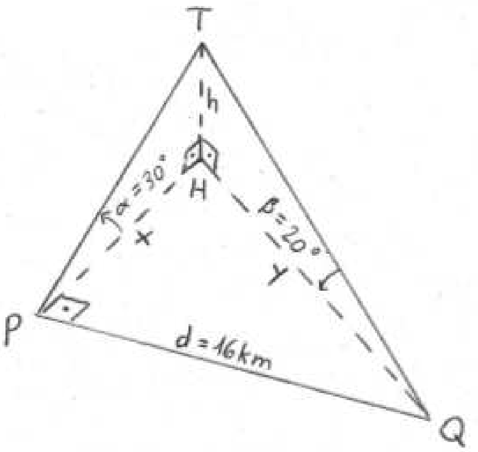
3. La construction ci-dessous montre très clairement qu'il y a exactement deux triangles.



On peut utiliser le théorème du cosinus ou celui du sinus.

petit triangle	grand triangle
$a_1 \cong 3.826$	$a_2 \cong 11.763$
$\alpha_1 \cong 18.590°$	$\alpha_2 \cong 101.410°$
$\gamma_1 \cong 131.410°$	$\gamma_2 \cong 48.590°$

Résolution de l'exercice 69



Par « tan-opp-adj », on a

① $\tan(\alpha) = \dfrac{h}{x}$ car PHT et QHT sont des triangles rectangles

② $\tan(\beta) = \dfrac{h}{y}$

Par Pythagore : $y^2 = x^2 + 16^2$ ③

car PHQ est un triangle rectangle.

De ① et ②, on isole x et y respectivement : $x = \dfrac{h}{\tan(\alpha)}$ et $y = \dfrac{h}{\tan(\beta)}$

On substitue dans ③ :

$$\frac{h^2}{\tan^2(\beta)} = \frac{h^2}{\tan^2(\alpha)} + 16^2$$

$$\overset{\cdot\tan^2(\beta)}{\underset{\cdot\tan^2(\alpha)}{\Longleftrightarrow}} \quad h^2\tan^2(\alpha) = h^2\tan^2(\beta) + 16^2\tan^2(\alpha)\tan^2(\beta)$$

$$\overset{-h^2\tan^2(\beta)}{\underset{\text{et factorisation}}{\Longleftrightarrow}} \quad h^2\left(\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)\right) = 16^2\tan^2(\alpha)\tan^2(\beta)$$

$$\Longleftrightarrow \quad h^2 = \frac{16^2\tan^2(\alpha)\tan^2(\beta)}{\tan^2(\alpha) - \tan^2(\beta)}$$

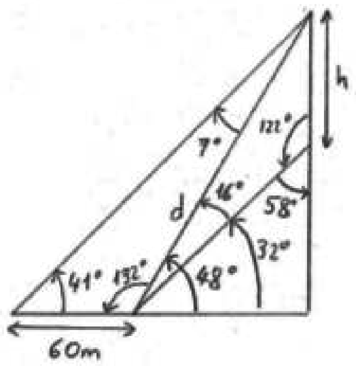
Donc $(h>0)$:

$$h = \frac{16\cdot\tan(30°)\cdot\tan(20°)}{\sqrt{\tan^2(30°) - \tan^2(20°)}} \cong 7.502\ \text{km}$$

calculatrice (la seule et unique utilisation)

Résolution de l'exercice 70

En utilisant des angles plats et le fait que la somme des angles dans un triangle vaut 180°, on complète des angles des triangles.
(d'abord 16°, puis 58° et 122°, puis 132° et 7°)



Par le théorème du sinus, dans le triangle à gauche, on trouve d

$$\frac{d}{\sin(41°)} = \frac{60}{\sin(7°)} \iff d = \frac{60\sin(41°)}{\sin(7°)} \underset{\substack{\text{calc} \\ (d \text{ en mémoire})}}{\cong} 322.998\,m$$

Par le théorème du sinus, dans le triangle au milieu, on trouve h

$$\frac{h}{\sin(16°)} = \frac{d}{\sin(122°)} \iff h = \frac{d\sin(16°)}{\sin(122°)} \underset{\text{calc}}{\cong} 104.983\,m$$

Résolution de l'exercice 71

On fait un schéma.

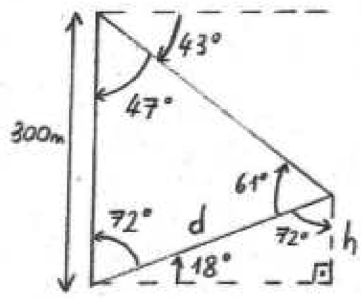
Par «tan-opp-adj», la distance horizontale entre A et le bâtiment vaut 39 mètres (38.6). Un deuxième «tan-opp-adj» permet de terminer. Finalement, la hauteur du bâtiment est de 31 mètres (31.4).

Résolution de l'exercice 72

Le volume du cône est donné par l'aire de sa base multipliée par sa hauteur, le tout divisé par 3. Cela permet de trouver la valeur de la hauteur en résolvant l'équation du volume.

On dessine un triangle rectangle dont les cathètes sont le rayon et la hauteur du cône. Le demi-angle d'ouverture se trouve par «tan-opp-adj». L'angle d'ouverture vaut $43.512°$.

Résolution de l'exercice 73



On complète les angles
(d'abord 47°, puis 72° et 61°,
puis 72° dans le triangle rect.)

Par le théorème du sinus, on trouve d

$$\frac{d}{\sin(47°)} = \frac{300}{\sin(61°)} \iff d = \frac{300\sin(47°)}{\sin(61°)} \underset{\substack{\text{calc} \\ \text{(dans mémoire)}}}{\cong} 250.859\,m$$

Par «sin-opp-hyp» dans le triangle rectangle :

$$\sin(18°) = \frac{h}{d} \iff h = d\cdot\sin(18°) \underset{\text{calc}}{\cong} 77.520\,m$$

Donc l'altitude du sommet vaut environ 1638m (1637.520m)

Résolution de l'exercice 74

On fait un schéma avec deux triangles rectangles (en remplaçant la montagne par un trait vertical). Par «tan-opp-adj», on trouve les deux longueurs horizontales, on les ajoute, on retire les grandeurs connues (60 et 45 mètres). Le tunnel fait 80 mètres (79.71).

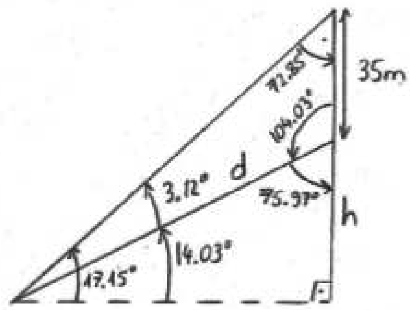
Résolution de l'exercice 75

1. En considérant le triangle rectangle d'hypoténuse $a + R$, par «cos-adj-hyp», on trouve la moitié de θ. On en déduit que θ vaut 162.60°.

   En considérant le triangle intérieur à celui d'avant d'angle $\frac{1}{2}\theta$ et d'hypoténuse R, on trouve $R - h = \frac{R^2}{a+R} \cong 965$ kilomètres (964.75). Ainsi $h = \frac{aR}{a+R} \cong 5413$ kilomètres (5413.39).

2. Un calcul de proportion donne 42.44%.

Résolution de l'exercice 76



On calcule des angles.
(d'abord 3.12°, puis 75.97° et 104.03°, puis 72.85°)

Par le théorème du sinus, on trouve d

$$\frac{d}{\sin(72.85°)} = \frac{35}{\sin(3.12°)} \Leftrightarrow d = \frac{35\sin(72.85°)}{\sin(3.12°)} \underset{\text{calc}}{\cong} 614.466\,m$$

(d en mémoire)

Par « sin-opp-hyp » dans le triangle rectangle, on trouve h

$$\sin(14.03°) = \frac{h}{d} \Leftrightarrow h = d \cdot \sin(14.03°) \cong 148.965\,m$$

Donc l'altitude vaut environ 1061m (1060.965m)

Résolution de l'exercice 77

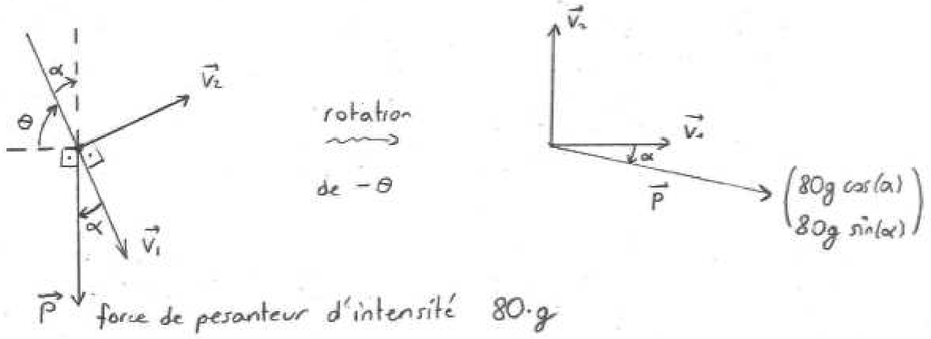
On représente la terre comme un cercle, on prend un point du cercle, on trace la tangente le rayon en ce point. D'un côté de la tangente, on dessine un triangle rectangle d'hypoténuse $R+1$ et de l'autre, un triangle rectangle d'hypoténuse $R+4$ (R est le rayon de la terre de 6 378 137 mètres).

Par «cos-adj-hyp», on trouve les deux angles au centre de la terre. En calculant ces angles en radians, on peut rapidement trouver la longueur d'arc parcourue par le bateau, qui vaut 10715 mètres (10714.776) (la somme des angles vaut environ $1.680 \cdot 10^{-3}$ radians ou un peu moins d'un centième de degré).

1.15 Les deux formes des vecteurs

1.16 Problèmes de trigonométrie avec les vecteurs

Résolution de l'exercice 81



1. On a $\vec{P} = \begin{pmatrix} 80g\cos(\alpha) \\ 80g\sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\alpha + \theta = -90° \Leftrightarrow \theta = -90° - \alpha$

2. On simule la marche sur la lune quand la force de pesanteur ressentie vaut $-80g_{lune}$. Or la force de pesanteur ressentie correspond à la deuxième composante de $\vec{P}$ dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$-80g_{lune} = 80g \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{-80g_{lune}}{80g} \overset{\star}{=} -\frac{g_{lune}}{g} \cong -\frac{1.62}{9.81} \cong -0.165$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{g_{lune}}{g}\right) \cong -9.51°$$

⋆ peut importe la masse de l'astronaute

Donc $\theta = -90° - \alpha \cong -80.49°$

L'angle, sans tenir compte de l'orientation vaut $\cong 80.49°$

3. Même démarche : $\sin(\alpha) = -\frac{g_{mars}}{g} \Longleftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{g_{mars}}{g}\right) \cong -22.22°$

Donc $\theta = -90° - \alpha = -67.78°$

Sans tenir compte de l'orientation cela donne environ $67.78°$

1.17 Problèmes d'optimisation concrète du deuxième degré

Résolution de l'exercice 83

Après avoir dessiné un petit schéma, on trouve la fonction à optimiser

$$V(x) = -10h^2 + 160h, \quad h \in]0, 16[$$

Le volume est maximal pour $h = 8$ centimètres.

Résolution de l'exercice 86

1. On nomme les inconnues : on note x et y les deux nombres de la donnée.
2. On détermine la fonction à optimiser : $P(x, y) = xy$.
3. On détermine la contrainte : $x + y = 36$.
4. On calcule les réponses.

   Le produit est maximal pour $x = 18$ et $y = 18$, il vaut 324.
   Le produit est minimal pour $x = 0$ et $y = 36$ ou pour $x = 36$ et $y = 0$, il vaut 0.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 87

1. On nomme les inconnues : on note x et y les deux nombres de la donnée.
2. On détermine la fonction à optimiser : $S(x, y) = x^2 + y^2$.
3. On détermine la contrainte : $x + y = 36$.
4. On calcule les réponses.

   La somme des carrés est minimale pour $x = 18$ et $y = 18$, elle vaut 648.
   La somme est maximale pour $x = 0$ et $y = 36$ ou pour $x = 36$ et $y = 0$, elle vaut 1296.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 88

On exprime le revenu en fonction du prix du billet et du nombres de billets vendus.

$$\begin{array}{ccccc} \text{revenu} & = & \text{prix du billet} & \cdot & \text{nombre de billets vendus} \\ R(x;y) & = & x & \cdot & y \end{array}$$

Le nombre de billets vendus s'exprime en fonction du prix du billet $y = 3250 - 50x$.

$$0 \leqslant y \leqslant 2000 \iff 25 \leqslant x \leqslant 65$$

Fonction à optimiser

$$R(x) = -50x^2 + 3250x, \quad x \in [25, 65]$$

Le revenu maximal, qui correspond à un billet coutant 32.50\$, est de 52 812.50\$.

Résolution de l'exercice 89

Il y a différentes méthodes possibles.

1. On pose x la longueur de la ficelle qui permet de faire le cercle.

   Ainsi, le périmètre du cercle vaut donc $x = 2\pi r$, ainsi $r = \dfrac{x}{2\pi}$.

   Par conséquent, l'aire du disque vaut $\dfrac{x^2}{4\pi}$.

   De plus, il reste $4 - x$ de ficelle pour le périmètre du triangle équilatéral.

   Le côté du triangle $\dfrac{4-x}{3}$ et sa hauteur vaut $h = \dfrac{\sqrt{3}(4-x)}{6}$.

   Par conséquent, l'aire du triangle vaut $\dfrac{\sqrt{3}(4-x)^2}{36}$.

   La somme des aires est la fonction à optimiser

   $$A(x) = \frac{9+\sqrt{3}\pi}{36\pi}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

   L'aire est minimale pour $x = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9+\sqrt{3}\pi} \cong 1.507$ mètres.

   L'aire est maximale pour $x = 4$ (lorsqu'il n'y a qu'un cercle).

2. On pose x la longueur de la ficelle qui permet de faire le triangle.

   Dans ce cas, les calculs sont similaires.

3. On note r le rayon du cercle et a la grandeur de l'arête du triangle équilatéral.

   Le périmètre du cercle est $2\pi r$ et son aire est πr^2.

   Le périmètre du triangle équilatéral est $3a$ et son aire est $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

   La somme des aires est la fonction à optimiser

   $$A(r,a) = \pi r^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

   La somme des périmètres est la longueur de la ficelle, c'est une contrainte.

   $$2\pi r + 3a = 4 \iff r = \frac{4-3a}{2\pi}$$

   L'aire s'écrit donc ainsi

   $$A(a) = \frac{\sqrt{3}\pi+9}{4\pi}a^2 - \frac{6}{\pi}a + \frac{4}{\pi},\ \ a \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$$

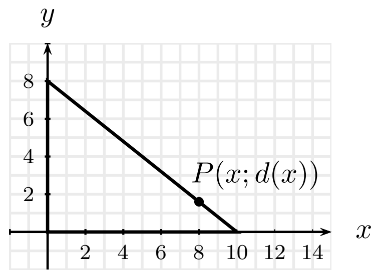
   L'aire est minimale pour $a = \dfrac{12}{\sqrt{3}\pi+9}$.

   En $a = 0$, $A(0) = \frac{4}{\pi} > 1$; en $a = \frac{4}{3}$, $A(\frac{4}{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{9} < 1$. L'aire est donc maximale pour $a = 0$.

4. Même méthode qu'avant, mais on isole a de la contrainte.

Résolution de l'exercice 90

On dessine le triangle en l'inscrivant dans le repère.



La droite qui forme l'hypoténuse est donnée par $d(x) = -\dfrac{4}{5}x + 8$.

L'aire du rectangle est la fonction à optimiser

$$A(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 8x, \quad x \in]0, 10[$$

L'aire est maximale pour $x = 5$. Cette aire vaut 20.

On aurait aussi pu dessiner le triangle debout. Dans ce cas, la fonction à optimiser est

$$A(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 10x, \quad x \in]0, 8[$$

L'aire est maximale pour $x = 4$.

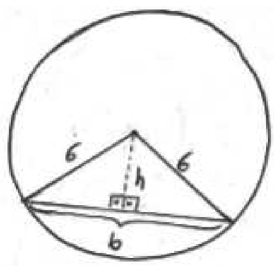
Résolution de l'exercice 91

1. $C(0) = 1500$ francs
2. Coûts minimaux pour $x = 50$ pièces, ils valent 1250 francs (domaine $[0, +\infty[$)
3. Bénéfice = recette − coûts = $15x - C(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 25x - 1500$

   Bénéfice maximum pour $x = 125$ pièces, il vaut 62 francs et 50 centimes

   (domaine : $x \in [100, 150]$ ou $x \in]0, +\infty[$)

Résolution de l'exercice 92



Le triangle est isocèle.

Aire $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

Contrainte : Pythagore $(\frac{1}{2}b)^2 + h^2 = 36$

Fonction à optimiser $A(h) = \sqrt{36h^2 - h^4}$, $h \in]0, 6[$

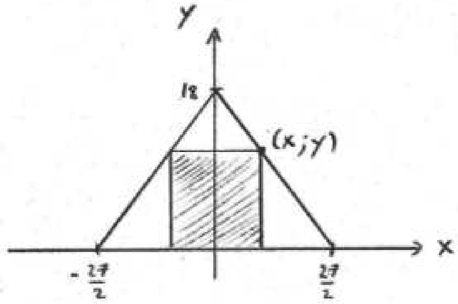
(on peut aussi exprimer l'aire en fonction de b : $A(b) = \sqrt{9b^2 - \frac{1}{16}b^4}$, $b \in]0, 12[$)

Réponses : maximum en $h = 3\sqrt{2}$, $b = 6\sqrt{2}$, aire $= 18$

Résolution de l'exercice 93

Coin supérieur droit du rectangle $(x;y)$

Contrainte $y = 18 - \frac{4}{9}x$



Aire du rectangle : $A(x,y) = 2xy$

On substitue : $A(x) = 2x(18 - \frac{4}{9}x)$

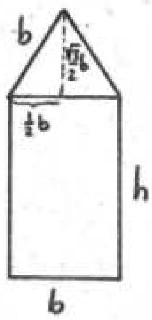
$= -\frac{8}{9}x^2 + 36x$

Domaine : $x \in \left]0, \frac{27}{2}\right[$

<u>Réponses :</u> l'aire est maximale pour un rectangle de base $\frac{27}{2}$ et de hauteur 9, elle vaut $\frac{243}{2}$.

Résolution de l'exercice 94

$\text{Aire}(b,h) = bh + \frac{1}{2}b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = bh + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$



Contrainte : périmètre $= 5 = 3b + 2h$

Fonction à optimiser : $A(b) = \frac{1}{2}(5b - 3b^2) + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

$= \frac{\sqrt{3}-6}{4}b^2 + \frac{5}{2}b, \quad b \in \left]0, \frac{5}{3}\right[$

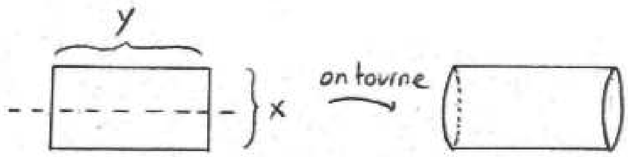
(On peut aussi exprimer l'aire en fonction de h

$$A(h) = \frac{1}{3}(5h - 2h^2) + \frac{\sqrt{3}}{36}(5-2h)^2 = \frac{\sqrt{3}-6}{9}h^2 + \frac{15-5\sqrt{3}}{9}h + \frac{25\sqrt{3}}{36}$$

$h \in \left]0, \frac{5}{2}\right[$)

<u>Réponses :</u> aire maximale pour $b = \frac{5(6+\sqrt{3})}{33}$ m et $h = \frac{5(5-\sqrt{3})}{22}$ m

Résolution de l'exercice 95



Contrainte : $2x + 2y = 60$ (périmètre)

1. Aire latérale

$A(x;y) = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) \cdot y$ (périmètre du cercle de base · hauteur)

$\overset{\text{subst.}}{\Longrightarrow}$ $A(x) = -\pi x^2 + 30\pi x$, $x \in]0,30[$

ou $A(y) = -\pi y^2 + 30\pi y$, $y \in]0,30[$

Réponse : l'aire est maximale pour $x = 15$cm et $y = 15$cm

2. Aire totale

$A(x;y) = \pi xy + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ (aire latérale + 2·aire du disque)

$\overset{\text{subst.}}{\Longrightarrow}$ $A(x) = \dots = -\frac{\pi}{2}x^2 + 30\pi x$, $x \in]0,30[$

ou $A(y) = \dots = -\frac{\pi}{2}y^2 + \frac{900\pi}{2}$, $y \in]0,30[$

Réponse : plus la dimension y s'approche de 0 et x s'approche de 30 plus l'aire devient grande (on peut dire que l'aire maximale est atteinte en $x = 30$ et $y = 0$: dans ce cas le cylindre consiste seulement en ses deux couvercles).

1.18 Techniques de démonstration

♡ **Exercice 96 : techniques de démonstration** (2 fois 5 minutes)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence $n^2 \in 2\mathbb{Z} \iff n \in 2\mathbb{Z}$.

Correction

« $\Longrightarrow$ » : par contraposée, on montre que $n \notin 2\mathbb{Z} \implies n^2 \notin 2\mathbb{Z}$.

Si $n \notin 2\mathbb{Z}$, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{\left(2k^2 + 2k\right)}_{\in\mathbb{Z}} + 1 \notin 2\mathbb{Z}$.

« $\Longleftarrow$ » : par méthode directe.

Si $n \in 2\mathbb{Z}$, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{\left(2k^2\right)}_{\in\mathbb{Z}} \in 2\mathbb{Z}$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence $n \notin 2\mathbb{Z} \iff n^2 \notin 2\mathbb{Z}$.

Correction

« $\Longrightarrow$ » : par méthode directe.

Si $n \notin 2\mathbb{Z}$, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{\left(2k^2 + 2k\right)}_{\in\mathbb{Z}} + 1 \notin 2\mathbb{Z}$.

« $\Longleftarrow$ » : par contraposée, on montre que $n \in 2\mathbb{Z} \implies n^2 \in 2\mathbb{Z}$.

Si $n \in 2\mathbb{Z}$, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{\left(2k^2\right)}_{\in\mathbb{Z}} \in 2\mathbb{Z}$.

♡ **Exercice 97 : techniques de démonstration** (2 fois 5 minutes)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'implication $n^2 \in 3\mathbb{Z} \implies n \in 3\mathbb{Z}$.

Correction

Par contraposée, on montre que $n \notin 3\mathbb{Z} \implies n^2 \notin 3\mathbb{Z}$.

Si $n \notin 3\mathbb{Z}$, on peut écrire n de deux façons.

1) $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ (le reste de division de n par 3 vaut 1).

Donc $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3\underbrace{\left(3k^2 + 2k\right)}_{\in\mathbb{Z}} + 1 \notin 3\mathbb{Z}$.

2) $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$ (le reste de division de n par 3 vaut 2).

Donc $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3\underbrace{\left(3k^2 + 4k + 1\right)}_{\in\mathbb{Z}} + 1 \notin 3\mathbb{Z}$.

Ainsi, quelque soit l'écriture de n, on a $n^2 \notin 3\mathbb{Z}$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'implication $n^3 \in 2\mathbb{Z} \implies n \in 2\mathbb{Z}$.

Correction

Par contraposée, on montre que $n \notin 2\mathbb{Z} \implies n^3 \notin 2\mathbb{Z}$.

Si $n \notin 2\mathbb{Z}$, alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } n^3 &= (2k+1)^3 = (2k+1)(2k+1)^2.\\ &= (2k+1)(4k^2+4k+1) = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1.\end{aligned}$$

Ainsi $n^3 = 2\underbrace{\left(4k^3 + 6k^2 + 3k\right)}_{\in\mathbb{Z}} + 1 \notin 2\mathbb{Z}$.

♡ **Exercice 98 : techniques de démonstration** (2 fois 5 minutes)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Infirmer l'implication $n^2 \in 4\mathbb{Z} \implies n \in 4\mathbb{Z}$ et démontrer sa réciproque.

Correction

Contre-exemple : $n = 2$.

Comme $n^2 = 4 \in 4\mathbb{Z}$, l'hypothèse est satisfaite.
Mais comme $n = 2 \notin 4\mathbb{Z}$, la conclusion ne peut pas être satisfaite.
Cela montre que l'implication est fausse.

Démontrons la réciproque, $n \in 4\mathbb{Z} \implies n^2 \in 4\mathbb{Z}$, de manière directe.

Si $n \in 4\mathbb{Z}$, alors $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^2 = 16k^2 = 4\underbrace{\left(4k^2\right)}_{\in\mathbb{Z}} \in 4\mathbb{Z}$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Infirmer l'implication $n^3 \in 4\mathbb{Z} \implies n \in 4\mathbb{Z}$ et démontrer sa réciproque.

Correction

Contre-exemple : $n = 2$.

Comme $n^3 = 8 \in 4\mathbb{Z}$, l'hypothèse est satisfaite.
Mais comme $n = 2 \notin 4\mathbb{Z}$, la conclusion ne peut pas être satisfaite.
Cela montre que l'implication est fausse.

Démontrons la réciproque, $n \in 4\mathbb{Z} \implies n^3 \in 4\mathbb{Z}$, de manière directe.

Si $n \in 4\mathbb{Z}$, alors $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^3 = 64k^3 = 4\underbrace{\left(16k^3\right)}_{\in\mathbb{Z}} \in 4\mathbb{Z}$.

♡ **Exercice 99 : techniques de démonstration** (3 fois 5 minutes)

1. Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ en utilisant, sans le démontrer, le fait que $n^2 \in 2\mathbb{Z} \implies n \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Correction

Par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
C'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a,\, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et $\frac{a}{b}$ irréductible.

$$\sqrt{2} = \tfrac{a}{b} \overset{(.)^2}{\Longrightarrow} 2 = \tfrac{a^2}{b^2} \overset{\cdot b^2}{\Longrightarrow} a^2 = 2b^2 \in 2\mathbb{Z},\ \text{car } b^2 \in \mathbb{Z}.$$

Comme $a^2 \in 2\mathbb{Z}$, par le fait, on sait que $a \in 2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On substitue $a = 2k$ dans $a^2 = 2b^2$ et on obtient

$$(2k)^2 = 2b^2 \implies 4k^2 = 2b^2 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} b^2 = 2k^2 \in 2\mathbb{Z},\ \text{car } k^2 \in \mathbb{Z}.$$

Comme $b^2 \in 2\mathbb{Z}$, par le fait, on sait que $b \in 2\mathbb{Z}$.
Puisque a et $b \in 2\mathbb{Z}$, la fraction $\frac{a}{b}$ est réductible par 2.
C'est une contradiction avec l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$.

2. Démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ en utilisant, sans le démontrer, le fait que $n^2 \in 3\mathbb{Z} \implies n \in 3\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Correction

Par l'absurde, on suppose que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
C'est-à-dire $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec $a,\, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et $\frac{a}{b}$ irréductible.

$$\sqrt{3} = \tfrac{a}{b} \overset{(.)^2}{\Longrightarrow} 3 = \tfrac{a^2}{b^2} \overset{\cdot b^2}{\Longrightarrow} a^2 = 3b^2 \in 3\mathbb{Z},\ \text{car } b^2 \in \mathbb{Z}.$$

Comme $a^2 \in 3\mathbb{Z}$, par le fait, on sait que $a \in 3\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $a = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On substitue $a = 3k$ dans $a^2 = 3b^2$ et on obtient

$$(3k)^2 = 3b^2 \implies 9k^2 = 3b^2 \overset{\div 3}{\Longrightarrow} b^2 = 3k^2 \in 3\mathbb{Z},\ \text{car } k^2 \in \mathbb{Z}.$$

Comme $b^2 \in 3\mathbb{Z}$, par le fait, on sait que $b \in 3\mathbb{Z}$.
Puisque a et $b \in 3\mathbb{Z}$, la fraction $\frac{a}{b}$ est réductible par 3.
C'est une contradiction avec l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$.

3. Démontrer que $\sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$ en utilisant, sans le démontrer, le fait que $n^3 \in 2\mathbb{Z} \implies n \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Correction

Par l'absurde, on suppose que $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}$.
C'est-à-dire $\sqrt[3]{4} = \frac{a}{b}$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et $\frac{a}{b}$ irréductible.

$$\sqrt[3]{4} = \frac{a}{b} \overset{(.)^3}{\Longrightarrow} 4 = \frac{a^3}{b^3} \overset{\cdot b^3}{\Longrightarrow} a^3 = 4b^3 = 2(2b^3) \in 2\mathbb{Z}, \text{ car } 2b^3 \in \mathbb{Z}.$$

Comme $a^3 \in 2\mathbb{Z}$, par le fait, on sait que $a \in 2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On substitue $a = 2k$ dans $a^3 = 4b^3$ et on obtient

$$(2k)^3 = 4b^3 \implies 8k^3 = 4b^3 \overset{\div 4}{\Longrightarrow} b^3 = 2k^3 \in 2\mathbb{Z}, \text{ car } k^3 \in \mathbb{Z}.$$

Comme $b^3 \in 2\mathbb{Z}$, par le fait, on sait que $b \in 2\mathbb{Z}$.
Puisque a et $b \in 2\mathbb{Z}$, la fraction $\frac{a}{b}$ est réductible par 2.
C'est une contradiction avec l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$.

♡ **Exercice 100 : techniques de démonstration** (2 fois 5 minutes)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer l'implication $n \notin 2\mathbb{Z} \implies 2n^2 - 2 \in 16\mathbb{Z}$.

Correction

On fait une preuve de manière directe.

Si $n \notin 2\mathbb{Z}$, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $2n^2 - 2 = 2(2k+1)^2 - 2 = 2(4k^2 + 4k + 1) - 2 = 8k(k+1)$.

On constate que $k(k+1)$ est pair.
1) Si k est pair, alors $k(k+1)$ est pair.
2) Si k n'est pas pair, alors $k+1$ est pair et donc $k(k+1)$ est pair.

Par conséquent $2n^2 - 2 = 8k(k+1) \in 16\mathbb{Z}$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer l'implication $n \notin 2\mathbb{Z} \implies 3n^2 - 3 \in 24\mathbb{Z}$.

Correction

On fait une preuve de manière directe.

Si $n \notin 2\mathbb{Z}$, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $3n^2 - 3 = 3(2k+1)^2 - 3 = 3(4k^2 + 4k + 1) - 3 = 12k(k+1)$.

On constate que $k(k+1)$ est pair.
1) Si k est pair, alors $k(k+1)$ est pair.
2) Si k n'est pas pair, alors $k+1$ est pair et donc $k(k+1)$ est pair.

Par conséquent $3n^2 - 3 = 12k(k+1) \in 24\mathbb{Z}$.

♡ **Exercice 101 : techniques de démonstration** (2 fois 5 minutes)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer l'implication $n^2 + 3n \notin 18\mathbb{Z} \implies n \notin 3\mathbb{Z}$.

Correction

Par contraposée, on montre que $n \in 3\mathbb{Z} \implies n^2 + 3n \in 18\mathbb{Z}$.

Si $n \in 3\mathbb{Z}$, alors $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^2 + 3n = (3k)^2 + 3(3k) = 9k^2 + 9k = 9k(k+1)$.

On constate que $k(k+1)$ est pair.
1) Si k est pair, alors $k(k+1)$ est pair.
2) Si k n'est pas pair, alors $k+1$ est pair et donc $k(k+1)$ est pair.

Par conséquent $n^2 + 3n = 9k(k+1) \in 18\mathbb{Z}$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer l'implication $n^2 + 4n \notin 32\mathbb{Z} \implies n \notin 4\mathbb{Z}$.

Correction

Par contraposée, on montre que $n \in 4\mathbb{Z} \implies n^2 + 4n \in 32\mathbb{Z}$.

Si $n \in 4\mathbb{Z}$, alors $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $n^2 + 4n = (4k)^2 + 4(4k) = 16k^2 + 16k = 16k(k+1)$.

On constate que $k(k+1)$ est pair.
1) Si k est pair, alors $k(k+1)$ est pair.
2) Si k n'est pas pair, alors $k+1$ est pair et donc $k(k+1)$ est pair.

Par conséquent $n^2 + 4n = 16k(k+1) \in 32\mathbb{Z}$.

♡ **Exercice 102 : techniques de démonstration** (2 fois 5 minutes)

1. Soit $y \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $4x^2 + 1 = 9y^2$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{N}$.

Correction

Par l'absurde, on suppose qu'il y a une solution $x \in \mathbb{N}$.

$$4x^2 + 1 = 9y^2 \iff 1 = 9y^2 - 4x^2 \iff 1 = \underbrace{(3y + 2x)}_{\in\mathbb{N}}\underbrace{(3y - 2x)}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Or le produit de deux nombres entiers ne peut faire 1 que si les deux nombres valent 1 ou -1.

Comme un des deux termes est dans $\mathbb{N}$, alors on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3y & + & 2x & = & 1 \\ 3y & - & 2x & = & 1 \end{array}\right. \overset{①+②}{\Longrightarrow} 6y = 2 \Longrightarrow y = \tfrac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

C'est une contradiction avec le fait que $y \in \mathbb{N}$.

2. Soit $y \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $9y^2 + 1 = 16x^2$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{N}$.

Correction

Par l'absurde, on suppose qu'il y a une solution $x \in \mathbb{N}$.

$$9y^2 + 1 = 16x^2 \iff 1 = 16x^2 - 9y^2 \iff 1 = \underbrace{(4x + 3y)}_{\in\mathbb{N}}\underbrace{(4x - 3y)}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Or le produit de deux nombres entiers ne peut faire 1 que si les deux nombres valent 1 ou -1.

Comme un des deux termes est dans $\mathbb{N}$, alors on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 3y & = & 1 \\ 4x & - & 3y & = & 1 \end{array}\right. \overset{①+②}{\Longrightarrow} 8x = 2 \Longrightarrow x = \tfrac{1}{4} \notin \mathbb{N}$$

C'est une contradiction avec le fait que $x \in \mathbb{N}$.

Résolution de l'exercice 103

Par l'absurde, on suppose que $\sqrt{5}$ est rationnel. Donc $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$.
On peut supposer que $\frac{a}{b}$ est irréductible (puisque toute fraction s'écrit sous forme irréductible).

On a ainsi :

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b} \overset{\text{au carré}}{\Longrightarrow} 5 = \frac{a^2}{b^2} \overset{\text{fois } b^2}{\Longrightarrow} \boxed{a^2 = 5b^2}$$

Ainsi, on constate que a^2 est un multiple de 5.
Par le fait (démontré ci-après) : on peut affirmer que a est un multiple de 5.

Par conséquent $a = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a ainsi :

$$\boxed{a^2 = 5b^2} \overset{a=5k}{\Longrightarrow} 25k^2 = 5b^2 \Longrightarrow b^2 = 5k^2$$

Ainsi, on constate que b^2 est un multiple de 5.
Par le fait (démontré ci-après) : on peut affirmer que b est un multiple de 5.

Par conséquent, la fraction est réductible par 5.
C'est une **contradiction** avec l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$.

Donc $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

Fait.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a : n^2 est un multiple de 5 $\Longrightarrow$ n est un multiple de 5.

On montre ce fait par contraposée

n n'est pas un multiple de 5 $\Longrightarrow$ n^2 n'est pas un multiple de 5

Si n n'est pas un multiple de 5, alors n s'écrit de quatre manières différentes.

1. $n = 5k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi
$$n^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(\overbrace{5k^2 + 2k}^{\in\mathbb{Z}}) + 1 \notin 5\mathbb{Z}$$

2. $n = 5k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi
$$n^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(\overbrace{5k^2 + 4k}^{\in\mathbb{Z}}) + 4 \notin 5\mathbb{Z}$$

3. $n = 5k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi
$$n^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(\overbrace{5k^2 + 6k + 1}^{\in\mathbb{Z}}) + 4 \notin 5\mathbb{Z}$$

4. $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi
$$n^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(\overbrace{5k^2 + 8k + 3}^{\in\mathbb{Z}}) + 1 \notin 5\mathbb{Z}$$

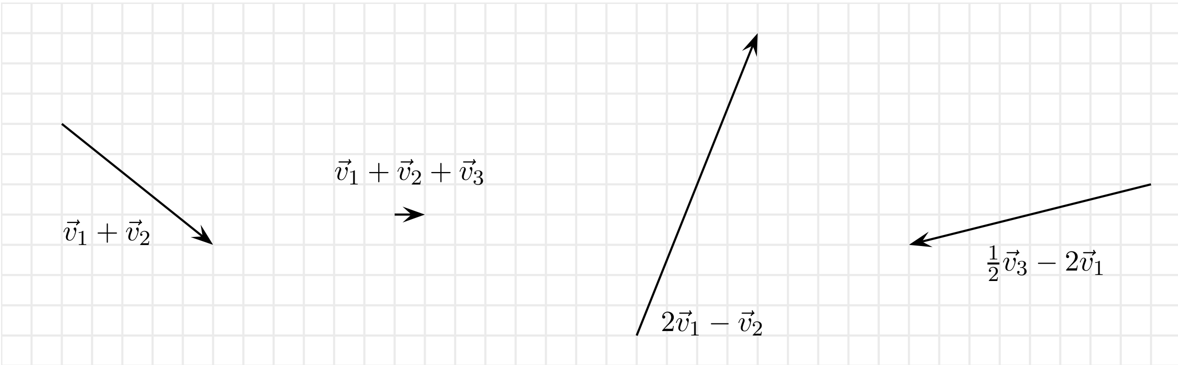
Donc quelque soit l'écriture de n, on remarque que n^2 n'est pas un multiple de 5.

1.19 Géométrie

1.19.1 Vecteurs et droites

Résolution de l'exercice 104

1.



2. a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Résolution de l'exercice 105

a) Les deux vecteurs sont colinéaires à $\binom{2}{1}$.
Une autre manière de le justifier est de remarquer que $\frac{5}{2}\vec{v} = \vec{w}$.

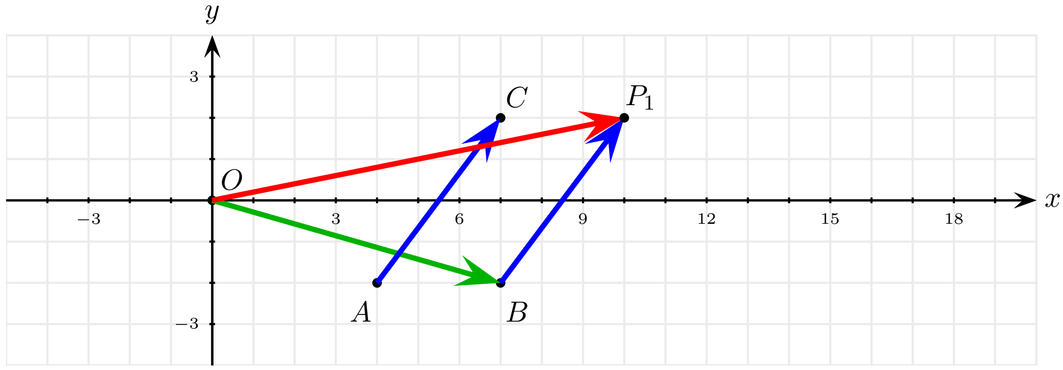
b) Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. En effet, seul $3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, or $5 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \neq \sqrt{5}\,!$

c) Les deux vecteurs sont colinéaires à $\binom{2}{-3}$.

d) Les deux vecteurs sont colinéaires à $\binom{3}{1}$ (multiplier le vecteur $\vec{w}$ par $\sqrt{3}$).

Résolution de l'exercice 106

1. Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est représenté en vert ; le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est représenté en bleu.



En rouge, on a représenté le vecteur $\overrightarrow{OP}_1$, résultant de l'addition des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. On a $\overrightarrow{OP}_1 = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $P_1(10; 2)$.

Résolution de l'exercice 107

Attention : les méthodes ci-dessous ne fonctionnent pas si on connait des vecteurs parallèles aux vecteurs donnés (car dans le cas de vecteurs parallèles, on ne maitrise ni leur sens, ni leur longueur.)

1. (a) On trouve le point B grâce à la relation $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

   (b) On trouve le point D grâce à la relation $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CM}$.
   On peut aussi utiliser la relation $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{CM}$.

   (c) On trouve le point S grâce à la relation $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR}$.
   On peut aussi utiliser la relation $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{QP}$.

2. (a) On a
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$$
   Donc $B(2;8)$.

   (b) On a
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$$
   Donc $D(-5;7)$.
   Avec l'autre relation, on trouve la même réponse.
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$$

   (c) On a
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$$
   Donc $S(12;4)$.
   Avec l'autre relation, on trouve la même réponse.
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$$

Résolution de l'exercice 112

Voici le calcul qu'il ne faut pas effectuer (pour la personne qui souhaite avoir les détails).

On veut exprimer $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\mathcal{B}$, donc comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

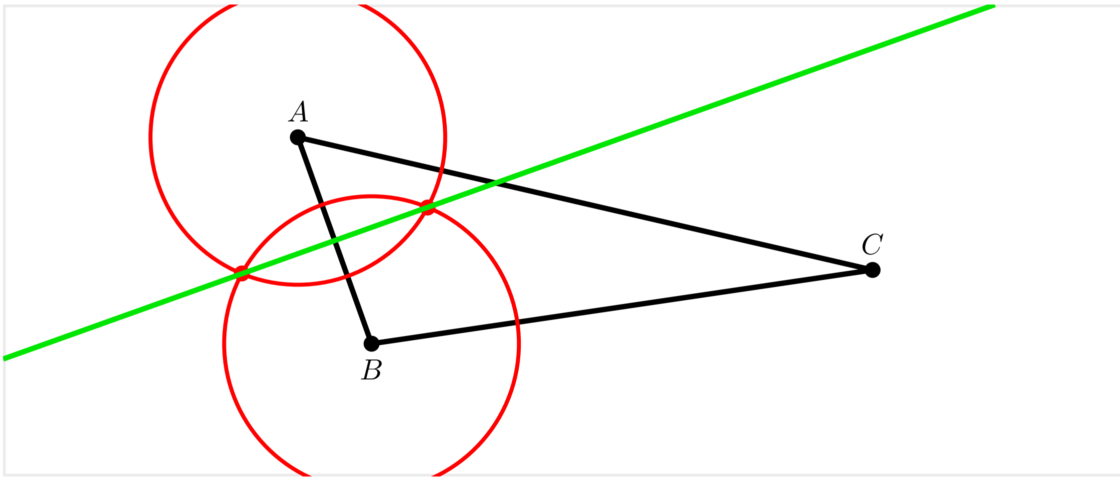
$$\overrightarrow{AB} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \iff \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 14 & = & 2\lambda_1 & - & 3\lambda_2 \\ -7 & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 \end{array}\right.$$

$$\overset{①-2②}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcr} 28 & = & & - & 7\lambda_2 \\ -7 & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcc} \lambda_2 & = & -4 \\ \lambda_1 & = & -7-2\lambda_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & -4 \end{array}\right.$$

Ainsi, dans la base $\mathcal{B}$, on a $\overrightarrow{AB}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

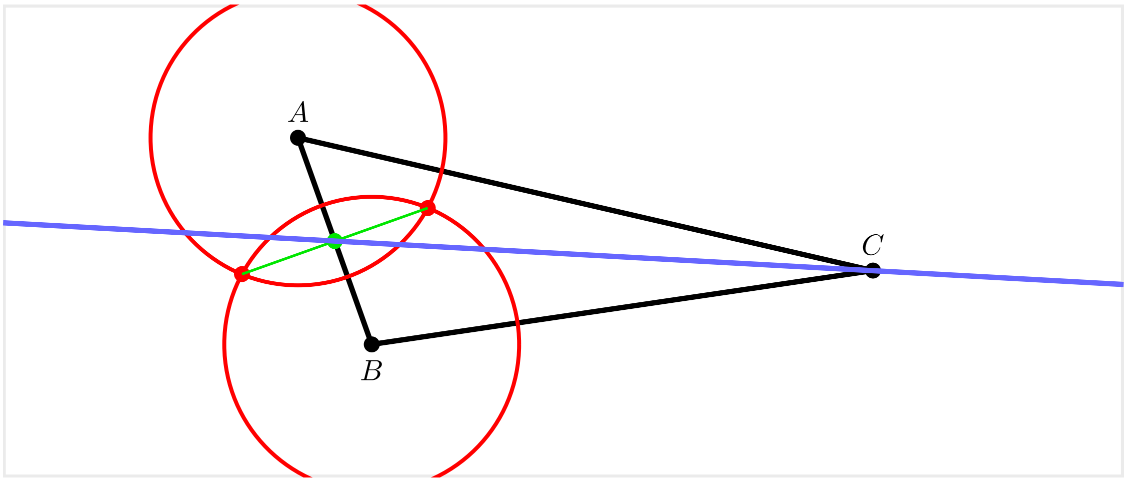
1.19.2 Droites remarquables dans le plan

✠ Exercice 113 : médiatrice à la règle et au compas

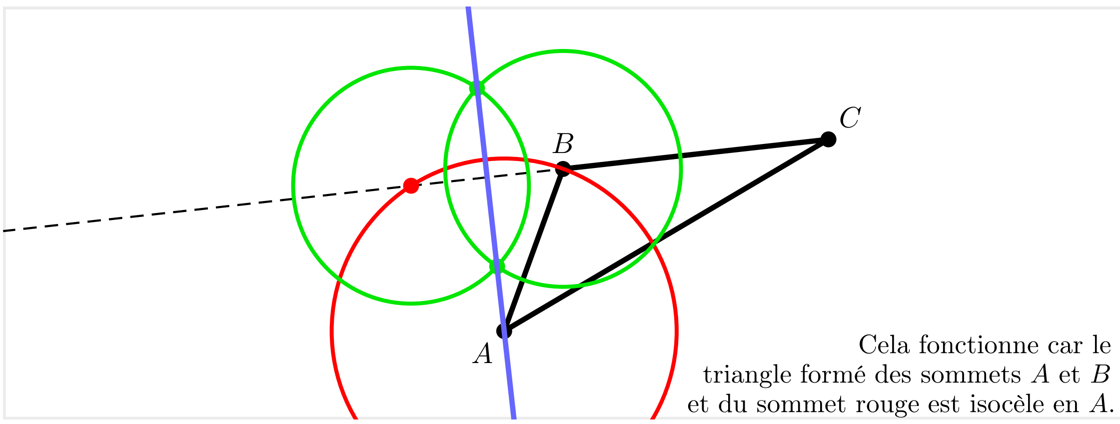


✠ Exercice 114 : médiane à la règle et au compas

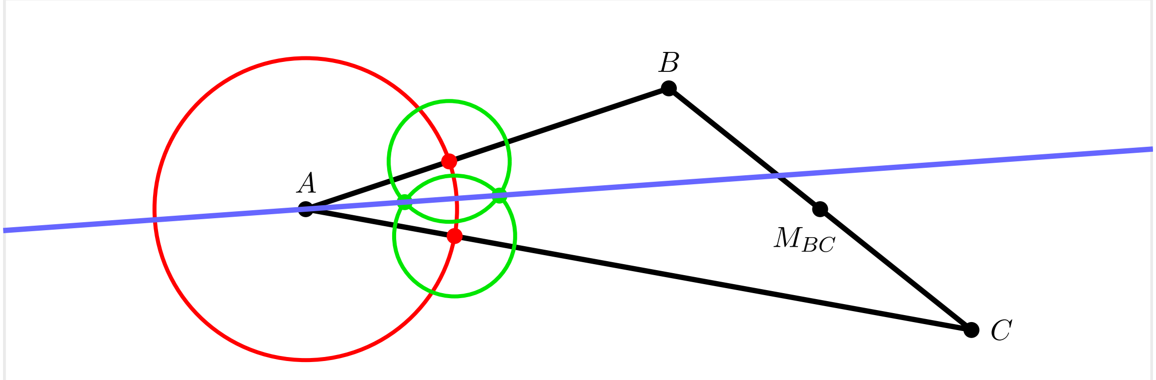
On trouve le point milieu du segment $[AB]$ en utilisant la même construction qui a permis d'établir la médiatrice (cf. exercice précédent).



✠ Exercice 115 : hauteur à la règle et au compas



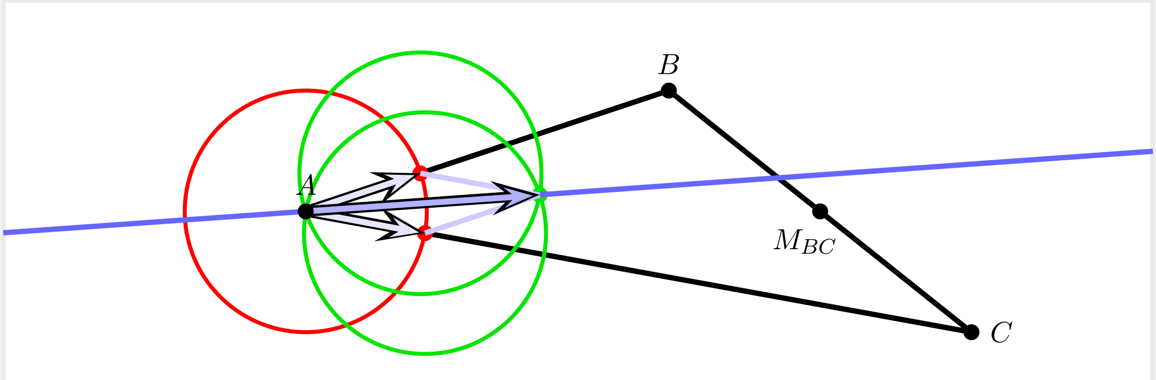
✠ Exercice 116 : bissectrice à la règle et au compas



Cela fonctionne car le triangle formé du sommet A et des sommets rouges est isocèle en A.

Ci-dessous, en prenant des cercles de même rayon, on retrouve une addition de vecteurs qui permet d'avoir le vecteur directeur de la bissectrice intérieure. Cela ne fonctionne que parce que les vecteurs qu'on additionne sont de **même longueur** !

Attention, si on change le sens d'un vecteur, cela donnera la bissectrice extérieure !



Cela fonctionne car le triangle formé du sommet A et des sommets rouges est isocèle en A.

♡ **Exercice 117 : médiatrice dans un triangle** (5 minutes)

Soit $A(-6;4)$, $B(2;-2)$ et $C(4;-5)$ trois points. On considère la médiatrice du triangle ABC qui passe par le sommet C **ou** le milieu du segment $[AB]$.

Dessiner cette médiatrice et établir ses représentations paramétrique et cartésienne.

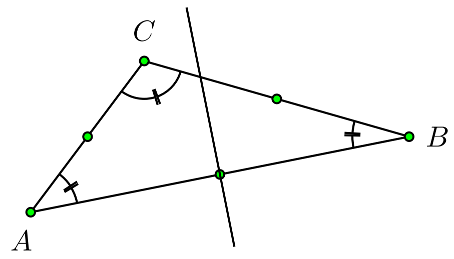
Correction

Point : $M(-2;1)$ le milieu du segment $[AB]$.

Vecteur normal de la médiatrice :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Équation cartésienne : $4x - 3y = -11$.



Vecteur directeur de la médiatrice : $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Représentation paramétrique de la médiatrice :

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

♡ **Exercice 118 : hauteur dans un triangle** (5 minutes)

Soit $A(2;5)$, $B(1;-3)$ et $C(7;-2)$ trois points. On considère la hauteur du triangle ABC qui passe par le sommet A **ou** le milieu du segment $[BC]$.

Dessiner cette hauteur et établir ses représentations paramétrique et cartésienne.

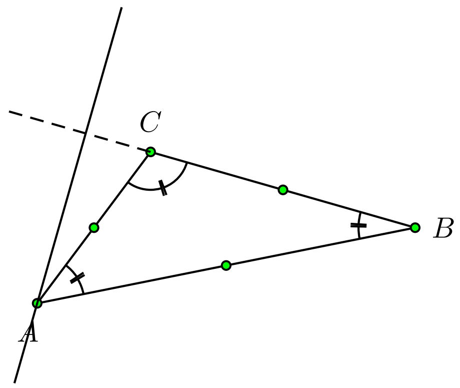
Correction

Point : $A(2;5)$.

Vecteur normal de la hauteur :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Équation cartésienne : $6x + y = 17$.



Vecteur directeur de la hauteur : $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Représentation paramétrique de la hauteur :

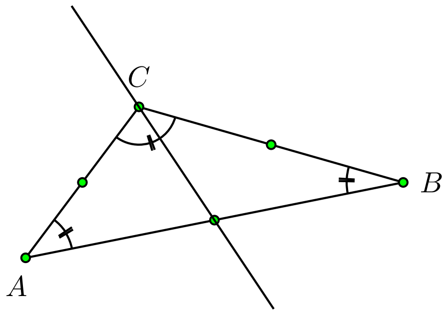
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 - 6\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

♡ **Exercice 119 : médiane dans un triangle** (5 minutes)

Soit $A(2;5)$, $B(4;-3)$ et $C(7;-2)$ trois points. On considère la médiane du triangle ABC qui passe par le sommet C **ou** le milieu du segment $[AB]$.

Dessiner cette médiane et établir ses représentations paramétrique et cartésienne.

Correction



Points : $C(7;-2)$.

$M(3;1)$ le milieu du segment $[AB]$.

Vecteur directeur de la médiane :

$$\overrightarrow{CM} = \binom{-4}{3} \parallel \binom{4}{-3}$$

Représentation paramétrique de la médiane :

$$\begin{cases} x = 7 + 4\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Vecteur normal de la médiane : $\vec{n} = \binom{3}{4}$.

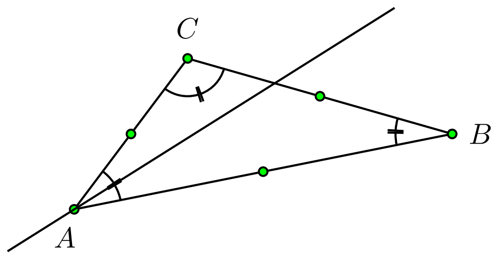
Équation cartésienne : $3x + 4y = 13$.

♡ **Exercice 120 : bissectrice dans un triangle** (5 minutes)

Soit $A(2;-3)$, $B(3;-5)$ et $C(4;8)$ trois points. On considère la bissectrice intérieure du triangle ABC qui passe par le sommet A **ou** le milieu du segment $[BC]$.
Dessiner cette bissectrice et établir ses représentations paramétrique et cartésienne.

Correction

Point : $A(2;-3)$.
Vecteur $\overrightarrow{AB} = \binom{1}{-2}$ de norme $\sqrt{5}$.
Vecteur $\overrightarrow{AC} = \binom{2}{11}$ de norme $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.
$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AC}$ est 5 fois plus long que $\overrightarrow{AB}$.



Vecteur directeur de la bissectrice :

$$5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \binom{7}{1}$$

Représentation paramétrique de la bissectrice :

$$\begin{cases} x = 2 + 7\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Vecteur normal de la bissectrice : $\vec{n} = \binom{1}{-7}$.

Équation cartésienne : $x - 7y = 23$.

♡ **Exercice 121 : tangente à un cercle** (5 minutes)

On considère le point $A(-3;2)$ et le cercle $\mathcal{C}$ centré en $C(-5;1)$ de rayon $\sqrt{5}$.
Montrer que le point A est sur le cercle et donner des représentations paramétrique et cartésienne de la tangente au cercle passant par le point A.

Correction

On calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{CA}$ pour déterminer si $A \in \mathcal{C}$.

$$d(A,C) = \|\overrightarrow{CA}\| = \left\|\binom{2}{1}\right\| = \sqrt{5} = r.$$

Point de la tangente : $A(-3;2)$.

Vecteur normal de la tangente : $\overrightarrow{CA} = \binom{2}{1}$

Équation cartésienne : $2x + y = -4$.

Vecteur directeur de la tangente : $\vec{d} = \binom{1}{-2}$.

Représentation paramétrique de la tangente :

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1.19.3 Intersection de droites, projections orthogonales

♡ **Exercice 122 : calcul d'intersection** (4 fois 5 minutes)

1. Calculer le point d'intersection des droites suivantes.

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 3\lambda \\ y & = & 2 & + & 4\lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & - & 7\mu \\ y & = & 6 & - & 8\mu \end{array} \right. , \mu \in \mathbb{R}$$

Notons $I(x;y)$ le point d'intersection de d_1 et de d_2.
Comme $I \in d_1$ et $I \in d_2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 3\lambda \\ y & = & 2 & + & 4\lambda \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & - & 7\mu \\ y & = & 6 & - & 8\mu \end{array} \right.$$

On résout le système de manière à trouver une inconnue (pas besoin des deux).
Il y a différentes manières de résoudre un tel système, en voici une.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\lambda & + & 7\mu & = & 4 \\ 4\lambda & + & 8\mu & = & 4 \end{array} \right. \overset{\text{simpl.}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\lambda & + & 7\mu & = & 4 \\ \lambda & + & 2\mu & = & 1 \end{array} \right. \overset{① - 3②}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} & & \mu & = & 1 \\ \lambda & + & 2\mu & = & 1 \end{array} \right.$$

On a trouvé $\mu = 1$.
Le point d'intersection est donc $I(-2;-2)$.
Vérification : Les deux coordonnées de I correspondent bien à $\lambda = -1$.

2. Calculer le point d'intersection des droites suivantes.

$$d_1 : 4x - 3y = -2 \qquad \text{et} \qquad d_2 : 8x - 7y = -2$$

Notons $I(x;y)$ le point d'intersection de d_1 et de d_2.
Comme $I \in d_1$ et $I \in d_2$, on résout le système.
Il y a différentes manières de résoudre un tel système, en voici une.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & -2 \\ 8x & - & 7y & = & -2 \end{array}\right. \overset{②-2①}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & -2 \\ & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

On a trouvé $y = -2$.

En substituant dans la première équation, on trouve

$$4x + 6 = -2 \iff 4x = -8 \iff x = -2$$

Le point d'intersection est donc $I(-2;-2)$.
Vérifier dans les deux équations cartésiennes.

3. Calculer le point d'intersection des droites suivantes.

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3\lambda \\ y & = & 2 & + & \lambda \end{array}\right., \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & \mu \\ y & = & 7 & - & 3\mu \end{array}\right., \ \mu \in \mathbb{R}$$

Notons $I(x;y)$ le point d'intersection de d_1 et de d_2.
Comme $I \in d_1$ et $I \in d_2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & 3\lambda \\ y & = & 2 & + & \lambda \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & \mu \\ y & = & 7 & - & 3\mu \end{array}\right.$$

On résout le système de manière à trouver une inconnue (pas besoin des deux).
Il y a différentes manières de résoudre un tel système, en voici une.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3\lambda & - & \mu & = & 5 \\ \lambda & + & 3\mu & = & 5 \end{array}\right. \overset{①-3②}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} & - & 10\mu & = & -10 \\ \lambda & + & 3\mu & = & 5 \end{array}\right.$$

On a trouvé $\mu = 1$.
Le point d'intersection est donc $I(4;4)$.
Vérification : Les deux coordonnées de I correspondent bien à $\lambda = 2$.

4. Calculer le point d'intersection des droites suivantes.

$$d_1 : x - 3y = -8 \qquad \text{et} \qquad d_2 : 3x + y = 16$$

Notons $I(x;y)$ le point d'intersection de d_1 et de d_2.
Comme $I \in d_1$ et $I \in d_2$, on résout le système.
Il y a différentes manières de résoudre un tel système, en voici une.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 3y &=& -8 \\ 3x + y &=& 16 \end{array}\right. \overset{②-3①}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x - 3y &=& -8 \\ 10y &=& 40 \end{array}\right.$$

On a trouvé $y = 4$.

En substituant dans la première équation, on trouve

$$x - 12 = -8 \iff x = 4$$

Le point d'intersection est donc $I(4;4)$.
Vérifier dans les deux équations cartésiennes.

✠ Exercice 123 : trop facile pour les contrôles de devoirs

1. Calculer le point d'intersection des droites suivantes.

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 + 3\lambda \\ y &=& 2 + 4\lambda \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : 8x - 7y = -2$$

Notons $I(x;y)$ le point d'intersection de d_1 et de d_2.
Comme $I \in d_1$ et $I \in d_2$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 + 3\lambda \\ y &=& 2 + 4\lambda \end{array}\right. \quad \text{et} \quad 8x - 7y = -2$$

On substitue les variables de la représentation paramétrique
dans l'équation cartésienne et on résout.

$$8(1+3\lambda) - 7(2+4\lambda) = -2 \iff -6 - 4\lambda = -2 \iff -4\lambda = 4$$

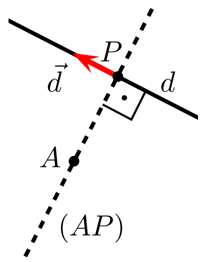
On a trouvé $\lambda = -1$.
En substituant cette valeur de λ dans la représentation paramétrée,
on obtient $I(-2;-2)$.
Vérifier dans l'équation cartésienne de d_2.

♡ **Exercice 124 : projections orthogonales d'un point sur une droite** (4 fois 5 minutes)

1. Calculer la projection orthogonale du point $A(17;1)$ sur la droite suivante.

$$d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & + & 2\lambda \\ y & = & 1 & + & 3\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

La projection orthogonale, notée P, est à l'intersection de d et de (AP).
Le vecteur $\vec{d} = \binom{2}{3}$ est un vecteur directeur à la droite d.
On voit que $\vec{d}$ est aussi un vecteur normal de la droite (AP).



$$(AP) : \ 2x \ + \ 3y \ = \ 37$$

On substitue les variables de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne et on résout.

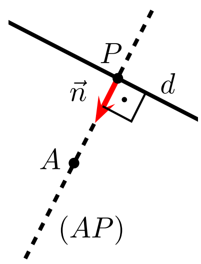
$$2(4+2\lambda) \ + \ 3(1+3\lambda) \ = \ 37 \iff 11+13\lambda = 37 \iff 13\lambda \ = \ 26$$

On a trouvé $\lambda = 2$.
On substitue cette valeur de λ dans la représentation paramétrée, et on obtient $P(8;7)$.

2. Calculer la projection orthogonale du point $A(17;1)$ sur la droite suivante.

$$d : \ 3x \ - \ 2y \ = \ 10$$

La projection orthogonale, notée P, est à l'intersection de d et de (AP).
Le vecteur $\vec{n} = \binom{3}{-2}$ est un vecteur normal à la droite d.
On voit que $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AP).



$$(AP) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 17 & + & 3\lambda \\ y & = & 1 & - & 2\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

On substitue les variables de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne et on résout.

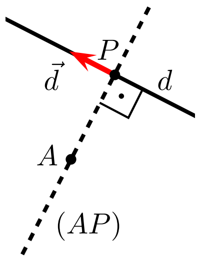
$$3(17+3\lambda) \ - \ 2(1-2\lambda) \ = \ 10 \iff 49+13\lambda = 10 \iff 13\lambda \ = \ -39$$

On a trouvé $\lambda = -3$.
On substitue cette valeur de λ dans la représentation paramétrée, et on obtient $P(8;7)$.

3. Calculer la projection orthogonale du point $A(26;-9)$ sur la droite suivante.

$$d : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & + & \lambda \\ y & = & 2 & - & 5\lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

La projection orthogonale, notée P, est à l'intersection de d et de (AP).
Le vecteur $\vec{d} = \binom{1}{-5}$ est un vecteur directeur à la droite d.
On voit que $\vec{d}$ est aussi un vecteur normal de la droite (AP).



$$(AP) : \ x \ - \ 5y \ = \ 71$$

On substitue les variables de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne et on résout.

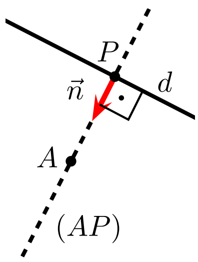
$$(3+\lambda) \ - \ 5(2-5\lambda) \ = \ 71 \iff -7+26\lambda = 71 \iff 26\lambda \ = \ 78$$

On a trouvé $\lambda = 3$.
On substitue cette valeur de λ dans la représentation paramétrée, et on obtient $P(6;-13)$.

4. Calculer la projection orthogonale du point $A(26;-9)$ sur la droite suivante.

$$d : \ 5x \ + \ y \ = \ 17$$

La projection orthogonale, notée P, est à l'intersection de d et de (AP).
Le vecteur $\vec{n} = \binom{5}{1}$ est un vecteur normal à la droite d.
On voit que $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AP).



$$(AP) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 26 & + & 5\lambda \\ y & = & -9 & + & \lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

On substitue les variables de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne et on résout.

$$5(26+5\lambda) \ + \ (-9+\lambda) \ = \ 17 \iff 121+26\lambda = 17 \iff 26\lambda \ = \ -104$$

On a trouvé $\lambda = -4$.
On substitue cette valeur de λ dans la représentation paramétrée, et on obtient $P(6;-13)$.

Résolution de l'exercice 125

1. **Intersection des droites d_1 et d_2.**

   1. **Méthode 1** : brutale.

      On met les équations paramétriques de d_1 dans d_2 :

      $$4(1+3\lambda)-3(2+4\lambda)=-2 \iff 4+12\lambda-6-12\lambda=-2 \iff -2=-2 \iff 0=0$$

      Cette équation sur λ étant toujours vraie cela signifie que tous les nombres λ sont solutions, donc tous les points de d_1 sont sur d_2.

      L'ensemble d'intersection de ces deux droites est donc la droite d_1 : $d_1 \cap d_2 = d_1$.

      Les droites d_1 et d_2 sont confondues (sous-entendu : c'est la même droite).

   2. **Méthode 2** : subtile.

      Un vecteur directeur de d_1 est $\binom{3}{4}$. Un vecteur normal de d_2 est $\binom{4}{-3}$, on voit donc que le vecteur $\binom{3}{4}$ est aussi un vecteur directeur de d_2. Donc les droites d_1 et d_2 sont soit parallèles, soit confondues.

      Prenons un point de d_1, disons $P(1;2)$ (celui qui correspond à $\lambda=0$), et vérifions si ce point est sur d_2 (c'est le cas si l'équation cartésienne est satisfaite pour ce point).

      $$4\cdot 1-3\cdot 2=-2$$

      L'équation est satisfaite, donc $P\in d_2$. Les droites d_1 et d_2 sont confondues.

2. **Intersection des droites d_2 et d_3.**

   1. **Méthode 1** : brutale.

      Il est impossible que les équations de d_2 et de d_3 soient satisfaites simultanément.

      $$\begin{cases} 4x-3y &= -2 \\ 4x-3y &= 7 \end{cases}$$

      L'ensemble d'intersection de ces deux droites est donc l'ensemble vide : $d_2\cap d_3=\emptyset$.

      Déduction : les droites d_2 et d_3 sont parallèles (sous-entendu non confondues).

   2. **Méthode 2** : subtile.

      Le vecteur $\binom{4}{-3}$ est un vecteur normal des deux droites d_2 et d_3. Donc les droites d_2 et d_3 sont soit parallèles, soit confondues.

      Prenons un point de d_2, disons $P(-\frac{1}{2};0)$ (que l'on trouve en *choisissant* $y=0$), et vérifions si ce point est sur d_3 (c'est le cas si l'équation cartésienne est satisfaite pour ce point) :

      $$4\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)-3\cdot 0=7$$

      L'équation n'est pas satisfaite (car $-2\neq 7$), donc $P\notin d_3$. Les droites d_2 et d_3 sont parallèles.

Déduction finale. Les droites d_1 et d_3 sont parallèles, car d_2 est parallèles à d_3 et $d_1=d_2$.

1.19.4 Problèmes de géométrie

Résolution de l'exercice 126

Le vecteur $\overrightarrow{AB} = \binom{-3}{-6}$ permet d'aller du point A au point B. Le segment $[AB]$ est le bout de droite qui va du point A au point B. Donc un point P du segment est donné par

On trouve P		en partant de A	et en ajoutant	un multiple (entre 0 et 1) du vecteur $\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{OP}$	$=$	$\overrightarrow{OA}$	$+$	$\lambda\overrightarrow{AB},\quad \lambda \in [0,1]$

Le segment est donné par

$$[AB] : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}, \quad \lambda \in [0,1]$$

Comme $A(4;5)$ et $\overrightarrow{AB} = \binom{-3}{-6}$, cela donne

$$[AB] : \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & 4 & - & 3\lambda \\ y & = & 5 & - & 6\lambda \end{array} \right., \quad \lambda \in [0,1]$$

Le point A correspond bien à $\lambda = 0$
Le point B correspond bien à $\lambda = 1$

On calcule le point d'intersection $I(x;y)$ en substituant les équations paramétriques ci-dessus dans l'équation cartésienne de d.

$$2(4-3\lambda) - 5(5-6\lambda) = 8 \iff 24\lambda = 25 \iff \lambda = \frac{25}{24}$$

Comme $\lambda = \frac{25}{24} > 1$, il n'y a pas d'intersection entre le segment $[AB]$ et la droite d (il y a bien une intersection entre la droite (AB) et la droite d).

Si on avait utilisé le vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = \binom{-3}{-6} \parallel \binom{1}{2}$, on aurait plutôt écrit la représentation

$$[AB] : \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & 4 & + & \mu \\ y & = & 5 & + & 2\mu \end{array} \right., \quad \mu \in \ ?$$

Il faut trouver l'intervalle dans lequel μ évolue. Le vecteur $\binom{1}{2}$ étant trois fois plus court et de sens opposé à $\overrightarrow{AB}$,on comprend que pour aller du point A au point B, il faut ajouter -3 fois le vecteur $\binom{1}{2}$ au lieu de 1 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On peut aussi trouver l'intervalle dans lequel μ évolue en regardant pour quelles valeurs de μ, on trouve les points A et B.

$$[AB] : \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & 4 & + & \mu \\ y & = & 5 & + & 2\mu \end{array} \right., \quad \mu \in [-3,0]$$

Le point A correspond bien à $\mu = 0$
Le point B correspond bien à $\mu = -3$

Résolution de l'exercice 128

Les schémas vus en classe montrent que

1. **Le point C est à l'intersection de m_C et de h_C.**

   Un calcul d'intersection digne de l'OB27 donne le point $C(2;5)$.

2. **Le point B s'obtient après avoir trouvé le point M, milieu du segment $[AB]$, qui est à l'intersection de (AB) et de h_C.**

   a) **Décrire la droite (AB).**

   La droite (AB) est perpendiculaire à h_C et passe par A.

   Comme h_C est décrite, sur la donnée, par l'équation cartésienne $2x + y = 9$, on voit un vecteur normal de h_C : le vecteur $\binom{2}{1}$.

   Ce même vecteur est un vecteur directeur de (AB) (regardez le schéma !). Ainsi

$$(AB) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 0 & + & 2\lambda \\ y & = & -6 & + & \lambda \end{array} \right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

   b) **Trouver le point milieu du segment $[AB]$.**

   Le point milieu du segment $[AB]$ est à l'intersection de la droite (AB) avec la droite m_C.

   Un calcul d'intersection digne de l'OB27 donne le point milieu $M(5; -\frac{7}{2})$.

   c) **Trouver le point B.**

   Connaître le point milieu M du segment $[AB]$ et une de ses extrémités (on connait A) permet de trouver B (si vous avez deux notes, que vous connaissez une des deux notes et la moyenne de ces deux notes, alors vous pouvez retrouver la note manquante).

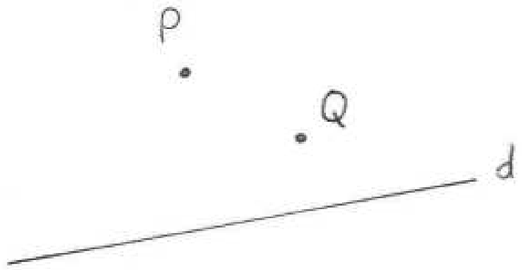
   Une technique parmi d'autres consiste à additionner des vecteurs.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

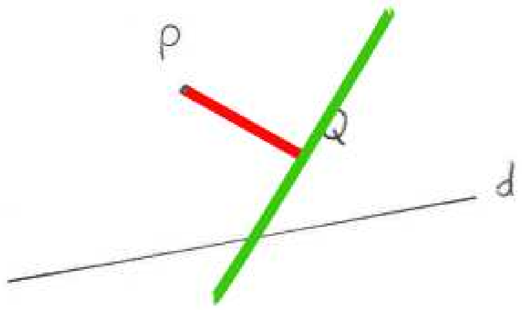
   Donc $B(10; -1)$.

Résolution de l'exercice 129

1. On fait un schéma



On peut compléter le schéma de la manière suivante.



La stratégie est visible sur le schéma : le point R est à l'intersection de la droite d et de la droite verte.

Le vecteur $\overrightarrow{QP} = \binom{8}{4} \parallel \binom{2}{1}$ est normal à la droite verte qui passe par le point $Q(7;3)$. Ainsi

$$\text{droite verte} : 2x + y = 17$$

Un calcul d'intersection digne de l'OB27 donne le point $R(4;9)$.

2. Ici, le parallélogramme est un rectangle. La méthode ci-dessous marche pour n'importe quel parallélogramme. On a

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ou aussi

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc $S(-4;5)$.

Résolution de l'exercice 130

Il est important de faire un schéma !

1. **Le point B est à l'intersection des droites (AB) et (BP).**

   (a) La droite (AB) est d'équation cartésienne $2x + 9y = 28$.

   (b) La droite (BP) est de **vecteur normal** $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passe par le **point** $P(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$. Donc une **équation cartésienne** est

   $$(BP) : x - 3y = -1$$

   On calcule l'intersection en résolvant le système.

   $$\begin{cases} 2x + 9y = 28 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \overset{①-2②}{\iff} \begin{cases} 15y = 30 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 + 3y = 5 \end{cases}$$

   Donc, on a $B(5; 2)$.

2. **Le point C se construit à l'aide du point milieu M du segment $[AC]$.**

   Le point M est à l'intersection de la droite (AC) et de la médiatrice m_{AC} (on peut aussi dire que M est la projection orthogonale du point D sur la droite (AC)).

   (a) La droite (AC) est de **vecteur directeur** $\overrightarrow{AP} \parallel \binom{1}{-3}$ et elle passe par le **point** $A(-4; 4)$. Donc une **représentation paramétrique** est

   $$(AC) : \begin{cases} x = -4 + \mu \\ y = 4 - 3\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

   (b) La médiatrice du segment $[AC]$ est de **vecteur normal** $\overrightarrow{AP} \parallel \binom{1}{-3}$ et elle passe par le **point** $D(6; 4)$. Donc une **équation cartésienne** est

   $$m_{AC} : x - 3y = -6$$

   On calcule l'intersection en substituant.

   $$(-4 + \mu) - 3(4 - 3\mu) = -6 \iff 10\mu = 10 \iff \mu = 1$$

   Donc, on a $M(-3; 1)$.

   Deux méthodes pour trouver C.

   (a) On utilise une relation vectorielle.

   $$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   (b) On pose $\mu = 2$ dans la représentation paramétrique de (AC) (puisque A correspond à $\mu = 0$ et M à $\mu = 1$).

   Donc, on a $C(-2; -2)$

Résolution de l'exercice 131

Le point M, milieu du segment $[AC]$, est à l'intersection de m_B et de m_{AC}.

$$\left\{\begin{array}{l} M(x;y) \in m_B \\ M(x;y) \in m_{AC} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 7y & = & -85 \\ -3x & + & 2y & = & 28 \end{array}\right. \iff \cdots \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2 \\ y & = & 11 \end{array}\right.$$

Ainsi $M(-2;11)$.

On trouve C à l'aide du point M grâce à l'une des relations

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM}$$

Dans les deux cas, on obtient $C(4;7)$.

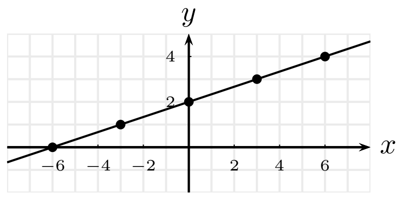
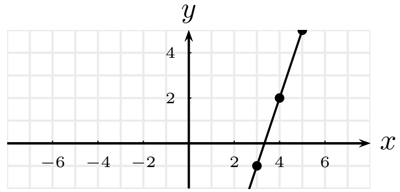
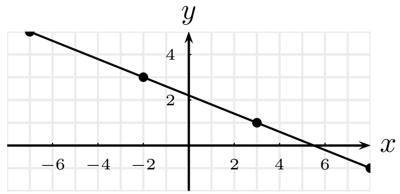
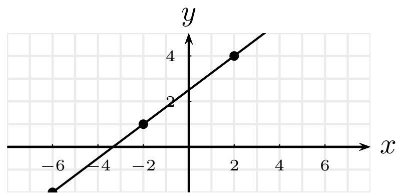
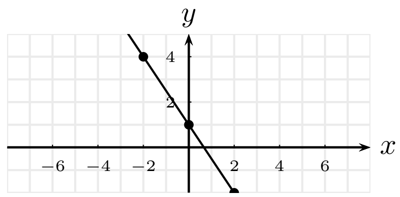
Le point B est à l'intersection de la droite d parallèle à m_{AC} passant par A et de la droite m_B.

$$\left\{\begin{array}{l} B(x;y) \in m_B \\ B(x;y) \in d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 7y & = & -85 \\ -3x & + & 2y & = & 54 \end{array}\right. \iff \cdots \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -16 \\ y & = & 3 \end{array}\right.$$

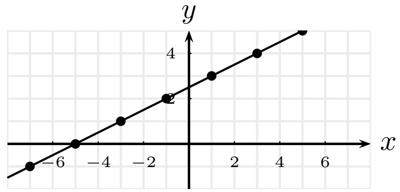
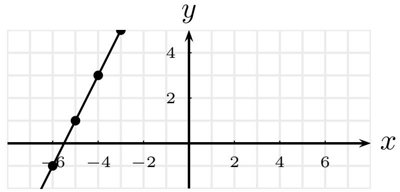
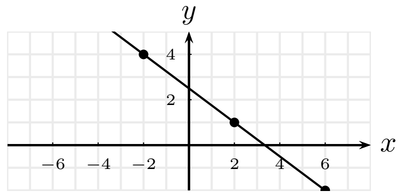
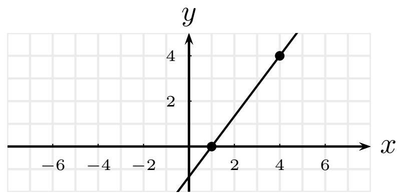
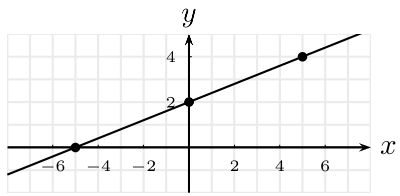
Ainsi $B(-16;3)$.

Vérification : les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \binom{-8}{-12}$ et $\overrightarrow{AC} = \binom{12}{-8}$ sont bien perpendiculaires. En effet, le premier est le vecteur croisé du second.

✠ Exercice 134 : les différentes visions des droites

DEUX points	UN point, UN vecteur directeur	UNE représentation paramétrique	UN point, UN vecteur normal	UNE représentation cartésienne	LA pente, LA hauteur	LA représentation graphique
$A(-3;1)$, $B(3;3)$	$P_0(-3;1)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$	$\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(-3;1)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$	$x-3y=-6$	$m=\dfrac{1}{3}$ $h=2$	
$A(4;2)$, $B(5;5)$	$P_0(4;2)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(4;2)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$	$-3x+y=-10$	$m=3$ $h=-10$	
$A(-2;3)$, $B(3;1)$	$P_0(-2;3)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(-2;3)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$	$2x+5y=11$	$m=-\dfrac{2}{5}$ $h=\dfrac{11}{5}$	
$A(-2;1)$, $B(2;4)$	$P_0(-2;1)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{cases} x = -2 + 4\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(-2;1)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$	$3x-4y=-10$	$m=\dfrac{3}{4}$ $h=\dfrac{5}{2}$	
$A(0;1)$, $B(2;-2)$	$P_0(0;1)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(0;1)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$3x+2y=2$	$m=-\dfrac{3}{2}$ $h=1$	

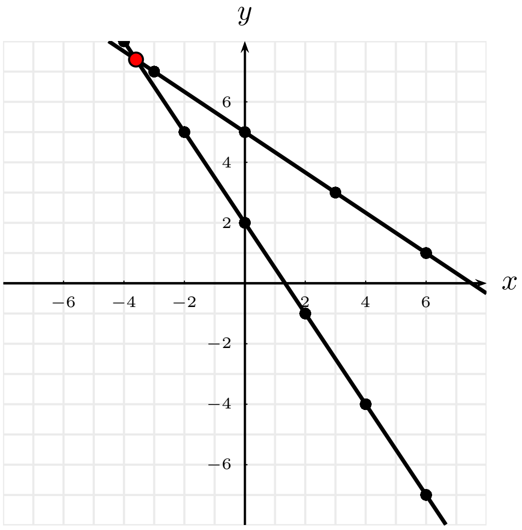
✠ Exercice 135 : les différentes visions des droites

DEUX points	UN point, UN vecteur directeur	UNE représentation paramétrique	UN point, UN vecteur normal	UNE représentation cartésienne	LA pente, LA hauteur	LA représentation graphique
$A(3;4)$, $B(-3;1)$	$P_0(3;4)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3 &+& 2\lambda \\ y &=& 4 &+& \lambda \end{array}\right.,\ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(3;4)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$	$x-2y=-5$	$m=\dfrac{1}{2}$ $h=\frac{5}{2}$	
$A(-4;3)$, $B(-3;5)$	$P_0(-4;3)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -4 &+& \lambda \\ y &=& 3 &+& 2\lambda \end{array}\right.,\ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(-4;3)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$	$2x-y=-11$	$m=2$ $h=11$	
$A(2;1)$, $B(6;-2)$	$P_0(2;1)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$	$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 2 &+& 4\lambda \\ y &=& 1 &-& 3\lambda \end{array}\right.,\ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(2;1)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$3x+4y=10$	$m=-\dfrac{3}{4}$ $h=\dfrac{5}{2}$	
$A(1;0)$, $B(4;4)$	$P_0(1;0)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$	$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& 3\lambda \\ y &=& & & 4\lambda \end{array}\right.,\ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(1;0)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$	$4x-3y=4$	$m=\dfrac{4}{3}$ $h=-\dfrac{4}{3}$	
$A(0;2)$, $B(5;4)$	$P_0(0;2)$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$	$\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& & & 5\lambda \\ y &=& 2 &+& 2\lambda \end{array}\right.,\ \lambda\in\mathbb{R}$	$P_0(0;2)$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$	$2x-5y=-10$	$m=\dfrac{2}{5}$ $h=2$	

1.20 Équations de degré 1 et représentations graphiques

♡ **Exercice 136 : recherche du point d'intersection de deux courbes** (2 fois 5 minutes)

1. Dessiner les courbes représentant les graphes des fonctions définies par $f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$ et $g(x) = -\frac{2}{3}x + 5$. Ensuite, déterminer, par calcul, le point d'intersection observé.



Pour trouver son abscisse,

on résout l'équation $f(x) = g(x)$.

$$-\tfrac{3}{2}x + 2 = -\tfrac{2}{3}x + 5$$
$$\iff 12 - 9x = 30 - 4x$$
$$\iff 5x = -18$$
$$\iff x = \tfrac{-18}{5}$$

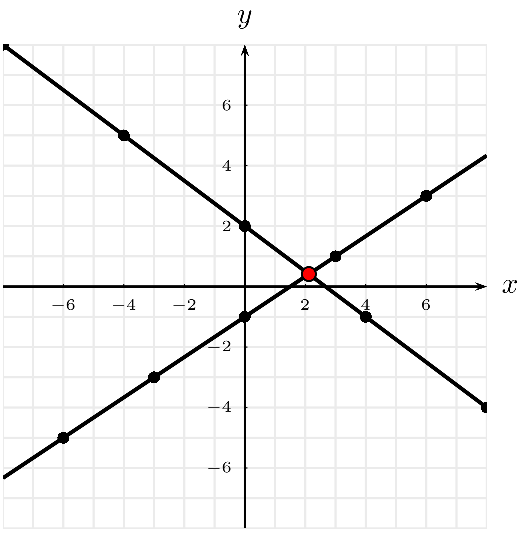
Pour trouver son ordonnée,

on remplace dans une des deux fonctions

$$f(-\tfrac{18}{5}) = -\tfrac{3}{2} \cdot \left(-\tfrac{18}{5}\right) + 2 = \tfrac{27}{5} + 2 = \tfrac{37}{5}$$
$$g(-\tfrac{18}{5}) = -\tfrac{2}{3} \cdot \left(-\tfrac{18}{5}\right) + 5 = \tfrac{12}{5} + 5 = \tfrac{37}{5}$$

Donc le point d'intersection est $(-\frac{18}{5}; \frac{37}{5})$

2. Dessiner les courbes représentant les graphes des fonctions définies par $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$ et $g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$. Ensuite, déterminer, par calcul, le point d'intersection observé.



Pour trouver son abscisse,

on résout l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\tfrac{2}{3}x - 1 = -\tfrac{3}{4}x + 2$$
$$\iff 8x - 12 = 24 - 9x$$
$$\iff 17x = 36$$
$$\iff x = \tfrac{36}{17}$$

Pour trouver son ordonnée,

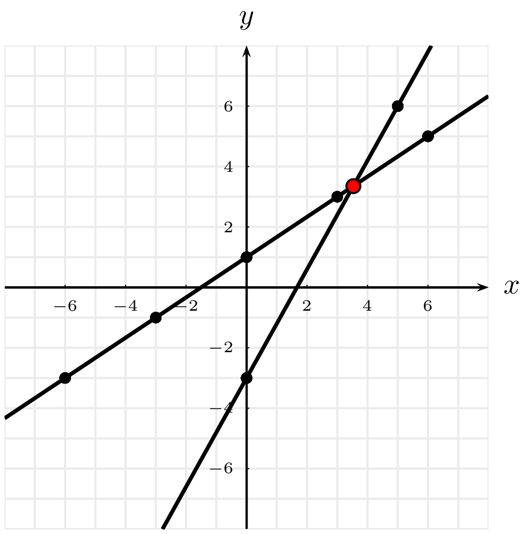
on remplace dans une des deux fonctions

$$f(\tfrac{36}{17}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{36}{17} - 1 = \tfrac{24}{17} - 1 = \tfrac{7}{17}$$
$$g(\tfrac{36}{17}) = -\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{36}{17} + 2 = -\tfrac{27}{17} + 2 = \tfrac{7}{17}$$

Donc le point d'intersection est $(\frac{36}{17}; \frac{7}{17})$

♡ **Exercice 137 : recherche du point d'intersection de deux courbes** (2 fois 5 minutes)

1. Dessiner les courbes représentant les graphes des fonctions définies par $f(x) = \frac{9}{5}x - 3$ et $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$. Ensuite, déterminer, par calcul, le point d'intersection observé.



Pour trouver son abscisse,
on résout l'équation $f(x) = g(x)$.

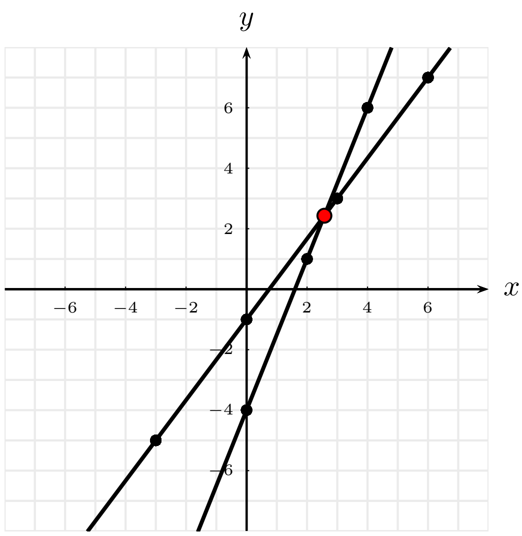
$$\frac{9}{5}x - 3 = \frac{2}{3}x + 1$$
$$\iff 27x - 45 = 10x + 15$$
$$\iff 17x = 60$$
$$\iff x = \frac{60}{17}$$

Pour trouver son ordonnée,
on remplace dans une des deux fonctions

$$f(\tfrac{60}{17}) = \frac{9}{5} \cdot \frac{60}{17} - 3 = \frac{108}{17} - 3 = \frac{57}{17}$$
$$g(\tfrac{60}{17}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{60}{17} + 1 = \frac{40}{17} + 1 = \frac{57}{17}$$

Donc le point d'intersection est $(\frac{60}{17}; \frac{57}{17})$

2. Dessiner les courbes représentant les graphes des fonctions définies par $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$ et $g(x) = \frac{4}{3}x - 1$. Ensuite, déterminer, par calcul, le point d'intersection observé.



Pour trouver son abscisse,
on résout l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\frac{5}{2}x - 4 = \frac{4}{3}x - 1$$
$$\iff 15x - 24 = 8x - 6$$
$$\iff 7x = 18$$
$$\iff x = \frac{18}{7}$$

Pour trouver son ordonnée,
on remplace dans une des deux fonctions

$$f(\tfrac{18}{7}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{18}{7} - 4 = \frac{45}{7} - 4 = \frac{17}{7}$$
$$g(\tfrac{18}{7}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{18}{7} - 1 = \frac{24}{7} - 1 = \frac{17}{7}$$

Donc le point d'intersection est $(\frac{18}{7}; \frac{17}{7})$

1.21 Fonctions affines et quadratiques

♡ **Exercice 138 : fonctions affines et quadratiques** (1 fois 5 minutes)

À partir des graphes ci-dessous, déterminer les expressions fonctionnelles, développées au maximum, de la droite d et de la parabole p.

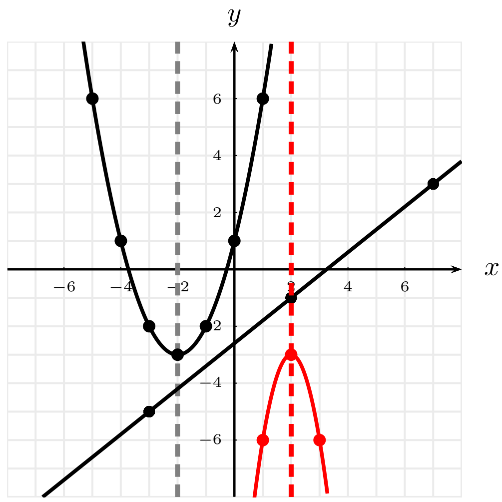
Dessiner, en couleur, le graphe de la fonction $g(x) = -3x^2 + 12x - 15$.

La droite est de pente $\frac{4}{5}$
et passe par le point $(2; -1)$.

Ainsi
$$d(x) = -1 + \tfrac{4}{5}(x-2)$$
$$\iff d(x) = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{13}{5}$$

La parabole est de demi-courbure 1
et son sommet est $(-2; -3)$.

Ainsi
$$p(x) = -3 + 1(x+2)^2$$
$$\iff p(x) = x^2 + 4x + 1$$



♡ Exercice 139 : fonctions affines et quadratiques (1 fois 5 minutes)

À partir des graphes ci-dessous, déterminer les expressions fonctionnelles, développées au maximum, de la droite d et de la parabole p.

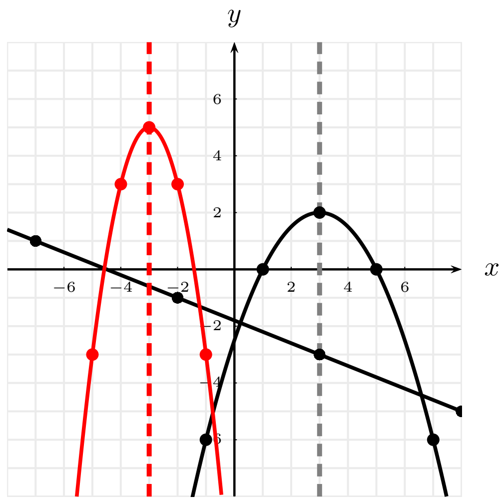
Dessiner, en couleur, le graphe de la fonction $g(x) = -2x^2 - 12x - 13$.

La droite est de pente $-\frac{2}{5}$ et passe par le point $(3; -3)$.

Ainsi $$d(x) = -3 - \frac{2}{5}(x-3)$$
$$\iff d(x) = -\frac{2}{5}x - \frac{9}{5}$$

La parabole est de demi-courbure $-\frac{1}{2}$ et son sommet est $(3; 2)$.

Ainsi
$$p(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-3)^2$$
$$\iff p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$$



♡ Exercice 140 : fonctions affines et quadratiques (1 fois 5 minutes)

À partir des graphes ci-dessous, déterminer les expressions fonctionnelles, développées au maximum, de la droite d et de la parabole p.

Dessiner, en couleur, le graphe de la fonction $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$.

La droite est de pente $-\frac{3}{4}$ et passe par le point $(2; 3)$.

Ainsi $d(x) = 3 - \frac{3}{4}(x-2)$

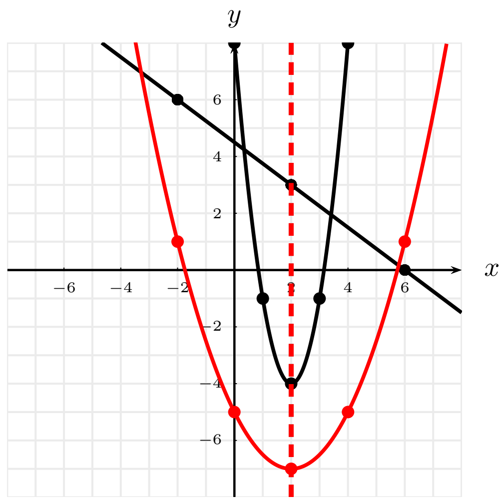
$\iff d(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

La parabole est de demi-courbure 3 et son sommet est $(2; -4)$.

Ainsi

$$p(x) = -4 + 3(x-2)^2$$

$$\iff p(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

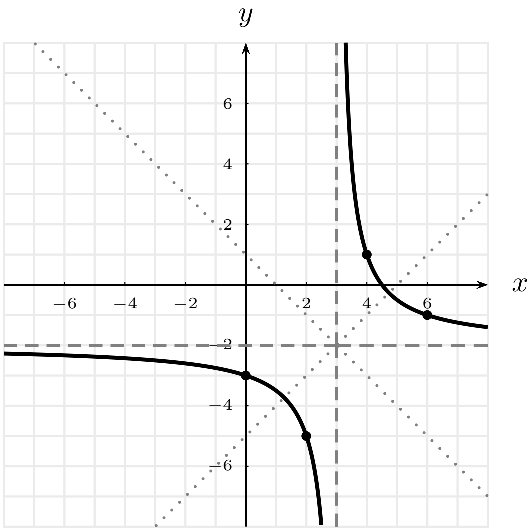


1.22 Fonctions exponentielles et logarithmes

1.23 Les homographies

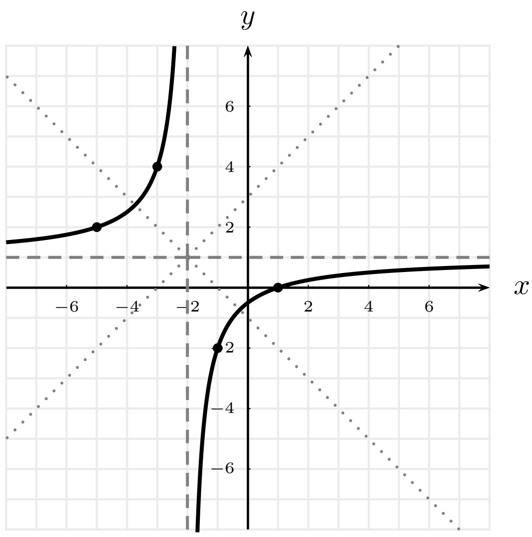
♡ **Exercice 143 : graphes d'homographie** (5 minutes)

Dessiner le graphe de la fonction d'expression fonctionnelle $f(x) = \dfrac{9-2x}{x-3}$.

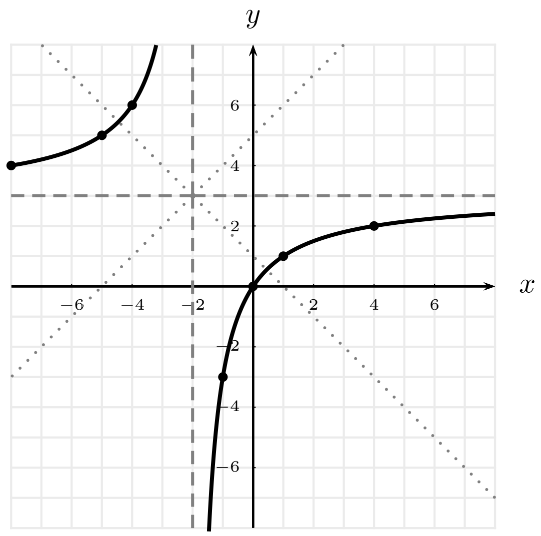


♡ **Exercice 144 : graphes d'homographie** (3 fois 5 minutes)

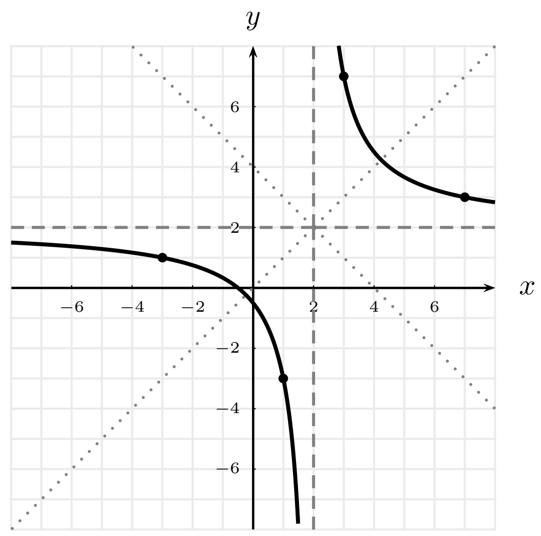
1. Dessiner le graphe de la fonction d'expression fonctionnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.



2. Dessiner le graphe de la fonction d'expression fonctionnelle $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$.



3. Dessiner le graphe de la fonction d'expression fonctionnelle $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.



1.24 Fonctions injectives, surjectives, bijectives et réciproques

♡ **Exercice 145 : injectivité, surjectivité et fonctions réciproque** (8 fois 5 minutes)

1. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to [3, +\infty[\,; x \mapsto 4x^2 + 3$.

   Décrire la fonction réciproque de la manière dont f est décrite ci-dessus.

Correction

Pour chaque $y \in [3, +\infty[$, on cherche l'unique $x \in [0, +\infty[$ tel que $f(x) = y$.

$$4x^2 + 3 = y \iff x^2 = \tfrac{1}{4}(y-3)$$

$$\overset{y\geqslant 3}{\iff} x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{y-3} \overset{x \geqslant 0}{\iff} x = \tfrac{1}{2}\sqrt{y-3}$$

Donc, la réciproque est $f^{-1} : [3, +\infty[\to [0, +\infty[\,; x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x-3}$

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty[\,; x \mapsto 9x^2 + 1$.

   Montrer que la fonction f est surjective, mais pas injective.

Correction

Pour chaque $y \in [1, +\infty[$, on montre qu'il y a au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

$$9x^2 + 1 = y \iff x^2 = \tfrac{1}{9}(y-1)$$

$$\overset{y\geqslant 1}{\iff} x = \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{y-1}$$

Si $y \geqslant 1$, on a bien trouvé au moins un $x \in \mathbb{R}$.

Mais, si $y > 1$, on a trouvé deux $x \in \mathbb{R}$: f n'est donc pas injective !

3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{2x-1}{3x+5}$.
   Montrer que la fonction f est injective, mais pas surjective.

Correction

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, on montre qu'il y a au plus un $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$ tel que $f(x) = y$.

$$\frac{2x-1}{3x+5} = y \overset{x \neq -\frac{5}{3}}{\iff} 2x - 1 = (3x+5)y \iff 2x - 1 = 3xy + 5y$$

$$\iff 2x - 3xy = 5y + 1 \iff (2-3y)x = 5y + 1 \underset{\text{seulement}}{\overset{y \neq \frac{2}{3}}{\iff}} x = \frac{5y+1}{2-3y}$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a bien trouvé au plus un $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$.

Si $y = \frac{2}{3}$, il n'y en a pas, car on ne divise pas par 0 !

$\implies$ f n'est donc pas surjective !

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[\,; x \mapsto (3x+5)^4$.
   Montrer que la fonction f est surjective, mais pas injective.

Correction

Pour chaque $y \in [0, +\infty[$, on montre qu'il y a au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

$$(3x+5)^4 = y \overset{y \geqslant 0}{\iff} 3x + 5 = \pm\sqrt[4]{y}$$

$$\iff x = \frac{\pm\sqrt[4]{y} - 5}{3}$$

Si $y \geqslant 0$, on a bien trouvé au moins un $x \in \mathbb{R}$.

Mais, si $y > 0$, on a trouvé deux $x \in \mathbb{R}$: f n'est donc pas injective !

5. On considère la fonction $f : \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}; x \mapsto (7-2x)^6$.

   Montrer que la fonction f est injective, mais pas surjective.

Correction

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, on montre qu'il y a au plus un $x \in \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$ tel que $f(x) = y$.

$$(7-2x)^6 = y \underset{\text{seulement}}{\overset{y \geqslant 0}{\Longleftrightarrow}} 7-2x = \pm\sqrt[6]{y}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt[6]{y}+7}{2} \overset{x \geqslant \frac{7}{2}}{\Longleftrightarrow} x = \frac{\sqrt[6]{y}+7}{2}$$

Si $y \in \mathbb{R}$, on a bien trouvé au plus un $x \in \left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

Si $y < 0$, il n'y en a pas, car la racine 6-ième d'un nombre négatif n'existe pas !

$$\Longrightarrow f \text{ n'est donc pas surjective !}$$

6. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto (3x+5)^3$.

   Décrire la fonction réciproque de la manière dont f est décrite ci-dessus.

Correction

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, on cherche l'unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

$$(3x+5)^3 = y \Longleftrightarrow 3x+5 = \sqrt[3]{y}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y}-5}{3}$$

Donc, la réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}-5}{3}$

7. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto -2 \cdot 3^x + 4$.

   Montrer que la fonction f est injective, mais pas surjective.

Correction

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, on montre qu'il y a au plus un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

$$-2 \cdot 3^x + 4 = y \iff 3^x = \frac{4-y}{2}$$

$$\underset{\text{seulement}}{\overset{y<4}{\iff}} \quad x = \log_3\left(\frac{4-y}{2}\right)$$

Si $y \in \mathbb{R}$, on a bien trouvé au plus un $x \in \mathbb{R}$.

Si $y \geqslant 4$, il n'y en a pas, car le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'existe pas !

$$\implies f \text{ n'est donc pas surjective !}$$

8. On considère la fonction $f : \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[\to \mathbb{R}; x \mapsto \log_2(3x+5)$.

   Décrire la fonction réciproque de la manière dont f est décrite ci-dessus.

Correction

Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, on cherche l'unique $x \in \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ tel que $f(x) = y$.

$$\log_2(3x+5) = y \iff 3x + 5 = 2^y$$

$$\iff x = \frac{2^y - 5}{3}$$

Donc, la réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[; x \mapsto \dfrac{2^x - 5}{3}$

Réponses de l'exercice 146

a) $f_1 \; : [0,+\infty[\to [0,+\infty[;\; x \mapsto x^2$

b) $f_2 \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\; x \mapsto -\frac{5}{4}x + 4$

c) $f_3 \; : [1,+\infty[\to [2,+\infty[;\; x \mapsto x^2 - 2x + 3$

d) $f_4 \; : \mathbb{R} \to]0,+\infty[;\; x \mapsto 2^x$

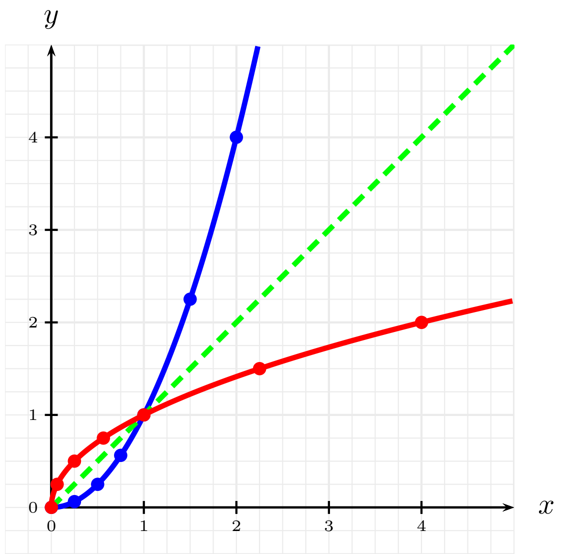
a) $f_1^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[;\; x \mapsto \sqrt{x}$

b) $f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\; x \mapsto -\frac{4}{5}x + \frac{16}{5}$

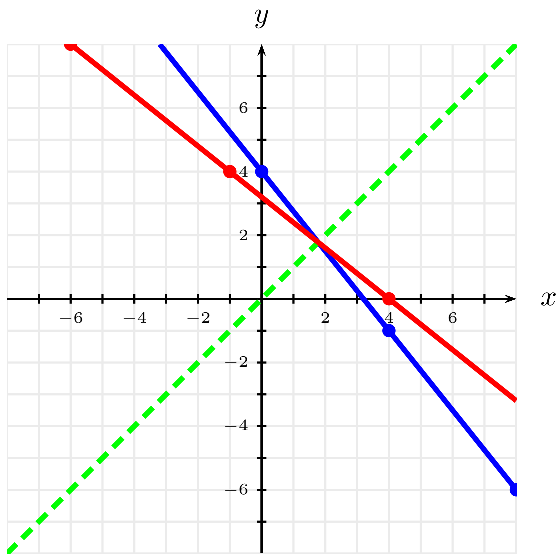
c) $f_3^{-1} : [2,+\infty[\to [1,+\infty[;\; x \mapsto 1 + \sqrt{x-2}$

d) $f_4^{-1} :]0,+\infty[\to \mathbb{R};\; x \mapsto \log_2(x)$

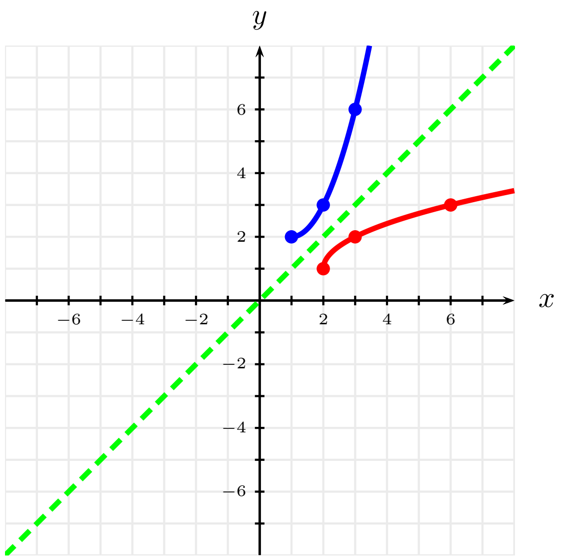
Pour f_1 et f_1^{-1} :



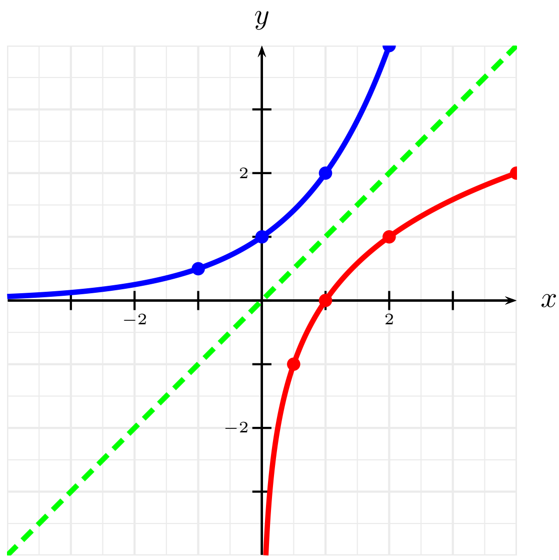
Pour f_2 et f_2^{-1} :



Pour f_3 et f_3^{-1} :

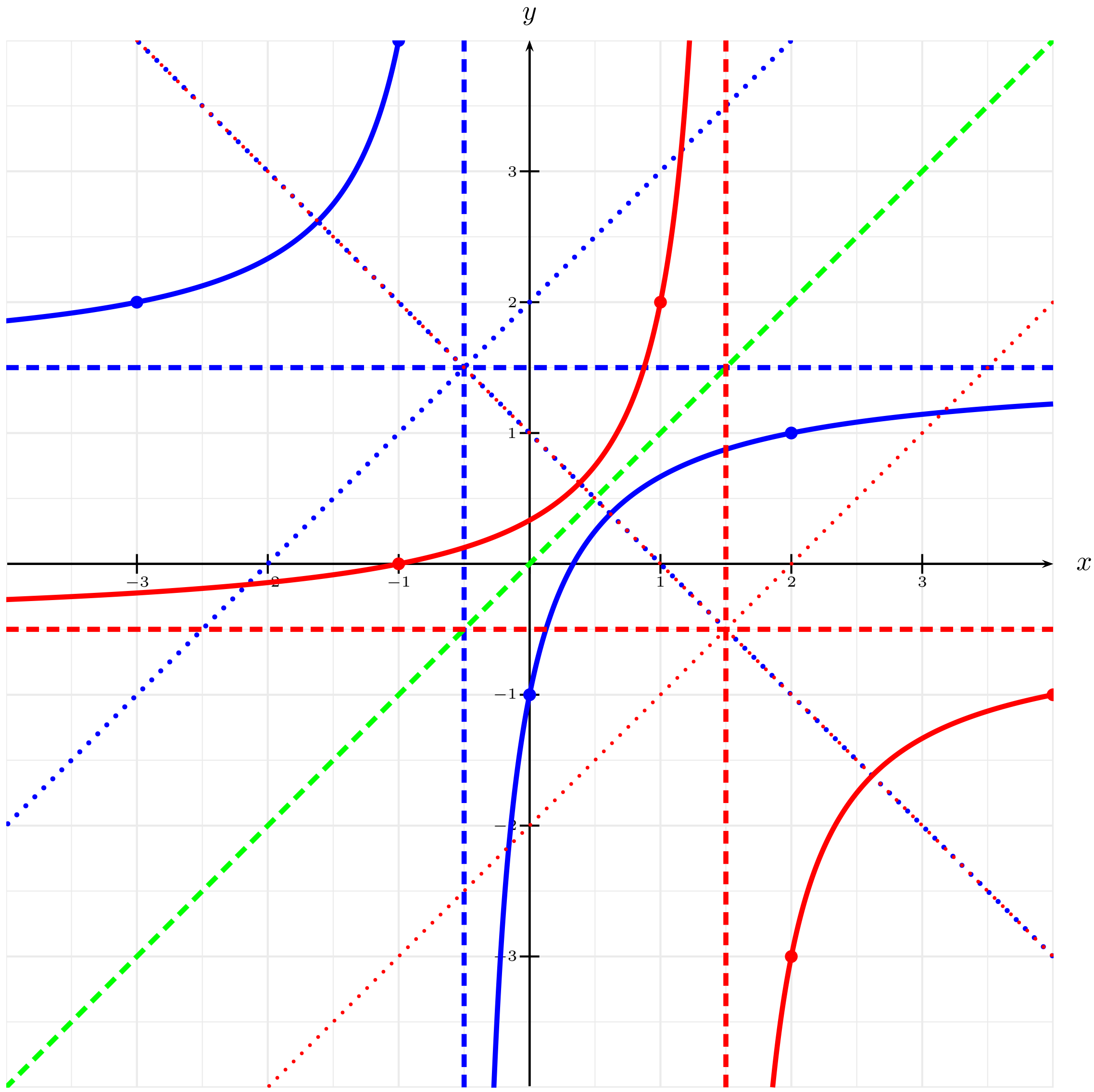


Pour f_4 et f_4^{-1} :



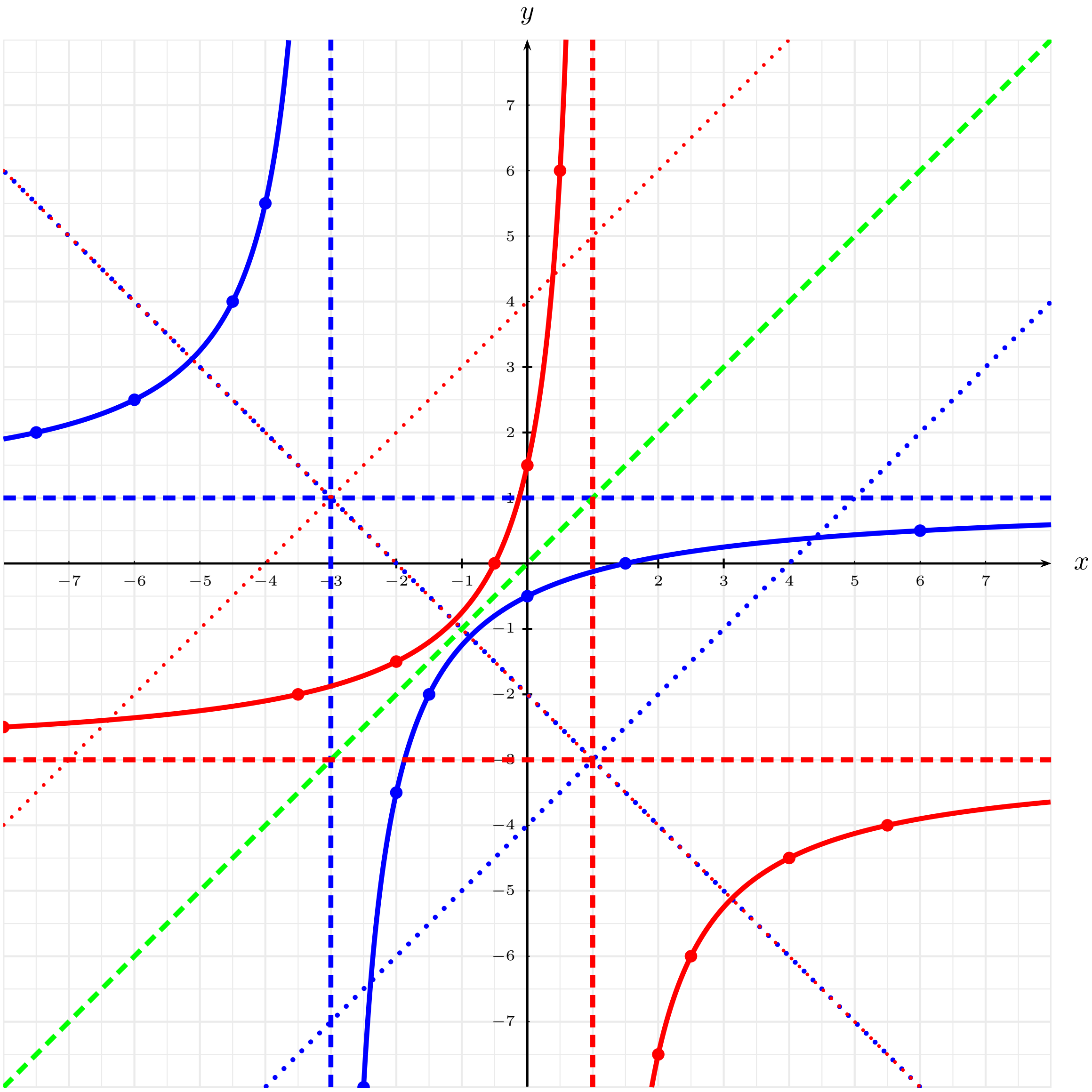
Réponses de l'exercice 147

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{3}{2}\};\ x \mapsto \frac{3x-1}{2x+1}$$
$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{3}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\};\ x \mapsto \frac{x+1}{-2x+3}$$



Réponses de l'exercice 148

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\};\ x \mapsto \frac{2x-3}{2x+6}$$
$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-3\};\ x \mapsto \frac{6x+3}{-2x+2}$$



1.25 Fonctions et opérations élémentaires sur les ensembles

Résolution de l'exercice 149

Sera fait en classe.

Résolution de l'exercice 150

1. Le domaine de f est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
   Celui de g est $\mathbb{R}$.
   Celui de h est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{11}{4}$ c) 3 d) $-\frac{2}{7}$ e) x

3. a) On factorise et on obtient $\dfrac{x+3}{x}$ dont le tableau de signes est

	-3		0	
$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$

   b) On factorise et on obtient $\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$ dont le tableau de signes est

	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$+$	$\lightning$	$-$	$\lightning$	$+$

   c) On factorise et on obtient $\dfrac{(2x-3)(x+1)}{x-2}$ dont le tableau de signes est

	-1		$\frac{3}{2}$		2	
$-$	0	$+$	0	$-$	$\lightning$	$+$

   d) On factorise et on obtient $\dfrac{2x^3-7}{8-x^3}$, en simplifiant par x^3-5 qui ne peut donc pas être nul, dont le tableau de signes est

	$\frac{\sqrt[3]{28}}{2}$		$\sqrt[3]{5}$		2	
$-$	0	$+$	$\lightning$	$+$	$\lightning$	$-$

Résolution de l'exercice 151

1.26 Problèmes d'optimisation du deuxième degré

Résolution de l'exercice 152

Point du graphe de p : $P(x;p(x))$.

Distance de A à P : $d(x)=\sqrt{x^2+(x^2-13)^2}$ (Pythagore).

Minimiser une fonction est équivalent à minimiser son carré.

Maximiser une fonction est équivalent à maximiser son carré.

Fonction à optimiser

$$d^2(x)=(x^2)^2-25(x^2)+169, \quad x\in[-4,4]$$

C'est une fonction quadratique en x^2 : $(x^2)^2-25(x^2)+169, \quad x^2\in[0,16]$.
On peut utiliser $y=x^2$, pour voir une fonction quadratique en y : $y^2-25y+169, \quad y\in[0,16]$.

C'est une fonction quadratique dont le graphe est une parabole orientée vers le haut. Il y a donc un minimum pour $x^2=\frac{-(-25)}{2}=\frac{25}{2}$. Ainsi $x=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$.

La distance est minimale pour $x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}\cong\pm3.54$. Elle vaut environ 3.57.

La distance est maximale pour $x=0$. Elle vaut 13.

En effet, comme $x^2\in[0,16]$, il fallait comparer les distances pour $x=0$ et pour $x=\pm4$. En $x=\pm4$, la distance vaut 5 et est donc plus petite qu'en $x=0$.

Pour x allant de 2 à 3, le maximum et le minimum se trouvent au bord du domaine, soit en $x=2$ ou en $x=3$. Le minimum correspond à $x=3$ (la distance vaut 5) et le maximum en $x=2$ (la distance vaut environ 9.22).

Problèmes d'optimisation pour réviser

Résolution de l'exercice 154

1. On nomme les fonctions : p correspond à la parabole orientée vers le bas, q correspond à celle orientée vers le haut.
2. On cherche les expressions fonctionnelles : $p(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{15}{7}x+6$ et $q(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+6$.
3. On détermine la fonction à optimiser : $l(x)=-\frac{45}{56}x^2+\frac{36}{7}x$.
4. On calcule les réponses.

La longueur est maximale pour $x=\frac{16}{5}$, elle vaut $\frac{288}{35}$.

La longueur est minimale pour $x=1$, elle vaut $\frac{243}{56}$.

plus d'indications

Résolution de l'exercice 155

Il est conseillé de dessiner cette droite et cette parabole.

La fonction à optimiser est la longueur du segment vertical (la droite est plus haute que la parabole).

$$l(x) = -x^2 + x + 2, \quad x \in [-1, 2]$$

La longueur est maximale pour $x = \frac{1}{2}$. Cette longueur vaut $\frac{9}{4}$.

Résolution de l'exercice 156

Coin supérieur droit du rectangle $P(x;y)$

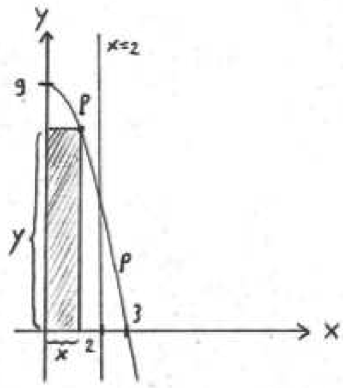
Contrainte : $y = p(x)$ (P est sur le graphe de p)

Périmètre du rectangle : $Périm(x,y) = 2x+2y$

On substitue : $Périm(x) = 2x + 2(9-x^2)$

$= -2x^2 + 2x + 18$

Domaine : $x \in]0,2]$



Réponses : le périmètre est maximal en $x = \frac{1}{2}$, il vaut $\frac{37}{2}$

le périmètre est minimal en $x = 2$, il vaut 14

(quand x est proche de 0, le périmètre est proche de 18)

Un problème d'optimisation utilisant la géométrie

Résolution de l'exercice 157

On peut considérer que I est l'origine du plan, et donner une représentation paramétrique du déplacement des voitures.

voiture : $\begin{cases} x = 0 + 20t \\ y = 0 \end{cases}$ autre voiture : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 50t \end{cases}$

La distance d'une voiture à l'autre est donnée par la norme d'un vecteur qui relie un point de la première droite à la deuxième.

$$d(x) = \sqrt{(-20t)^2 + (2-50t)^2}$$

Comme optimiser une fonction revient à optimiser son carré, voici la fonction à optimiser

$$d^2(x) = 2900t^2 - 200t + 4, \quad t \in \mathbb{R}$$

La distance est minimale pour $t = \frac{1}{29}$, qui correspond à 10 heures, 2 minutes et 4 secondes.

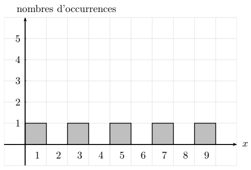
1.27 Mise en équation : exponentielles et des logarithmes

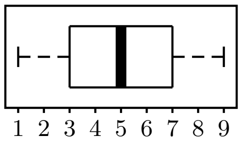
1.28 Notions de statistiques

Résolution de l'exercice 162

a)

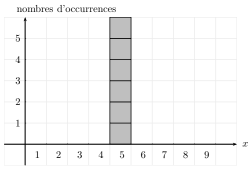
Paramètres de position	Paramètres de dispersion
moyenne $= 5$	étendue $= 8$
médiane $= 5$	variance $= 8$
mode $= \{1, 3, 5, 7, 9\}$	écart type $= 2\sqrt{2}$

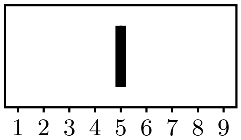




b)

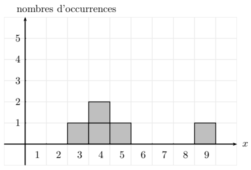
Paramètres de position	Paramètres de dispersion
moyenne $= 5$	étendue $= 0$
médiane $= 5$	variance $= 0$
mode $= \{5\}$	écart type $= 0$

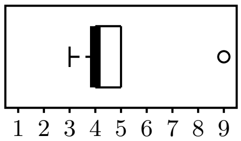




c)

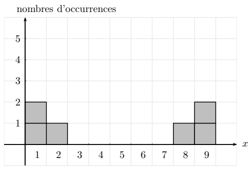
Paramètres de position	Paramètres de dispersion
moyenne $= 5$	étendue $= 6$
médiane $= 4$	variance $= \frac{22}{5}$
mode $= \{4\}$	écart type $= \sqrt{\frac{22}{5}}$

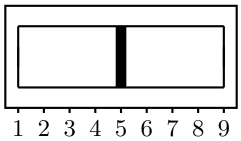




d)

Paramètres de position	Paramètres de dispersion
moyenne $= 5$	étendue $= 8$
médiane $= 5$	variance $= \frac{41}{3}$
mode $= \{1, 9\}$	écart type $= \sqrt{\frac{41}{3}}$



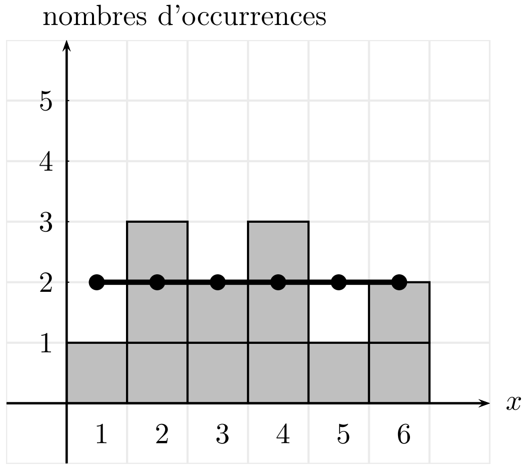


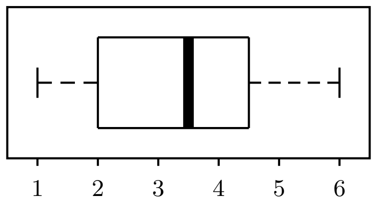
Concernant les distributions, il n'y a ni assez de données pour utiliser la loi des grands nombres, ni de loi de probabilité évidente pour donner une conclusion plausible.

La moyenne arithmétique est toujours la même.

Résolution de l'exercice 163

Paramètres de position	Paramètres de dispersion
moyenne $= 3.5$	étendue $= 5$
médiane $= 3.5$	variance $= \frac{29}{12}$
mode $= \{2, 4\}$	écart type $= \sqrt{\frac{29}{12}}$



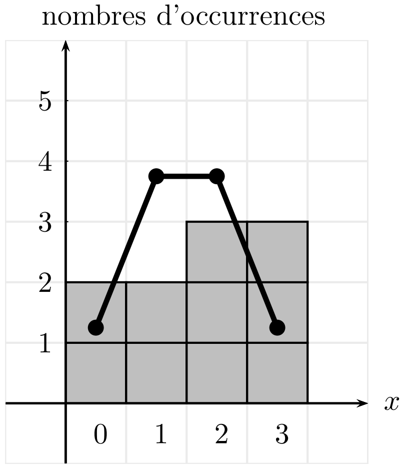


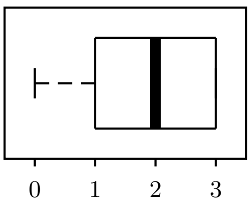
Il n'y a pas assez de données pour voir la distribution.

Par contre, si le dé est bien équilibré, on sait qu'il y a une chance sur six que chacun des numéros apparaisse : la distribution est uniforme.

Résolution de l'exercice 164

Paramètres de position	Paramètres de dispersion
moyenne = 1.7	étendue = 3
médiane = 2	variance = 1.21
mode = $\{2, 3\}$	écart type = 1.1





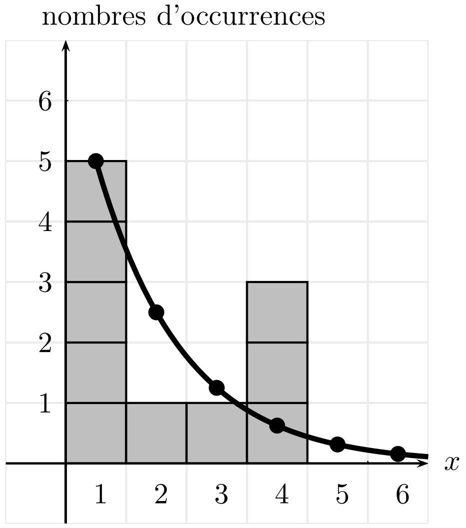
Il n'y a pas assez de données pour voir la distribution.

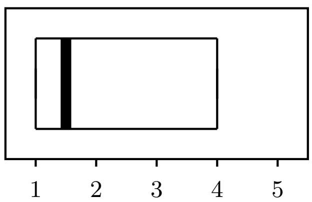
Par contre, si la pièce est bien équilibrée, la probabilité que pile apparaisse 0 fois vaut $\frac{1}{8}$; pour 1 fois pile, la probabilité vaut $\frac{3}{8}$; pour 2 fois pile, la probabilité vaut $\frac{3}{8}$; pour 3 fois pile, la probabilité vaut $\frac{1}{8}$.

La distribution est donc symétrique.

Résolution de l'exercice 165

Paramètres de position	Paramètres de dispersion
moyenne = 2.2	étendue = 3
médiane = 1.5	variance = 1.76
mode = $\{1\}$	écart type $\cong$ 1.33





Il n'y a pas assez de données pour voir la distribution.

Par contre, si la pièce est bien équilibrée, la probabilité d'avoir le premier pile au lancer numéro 1 vaut $\frac{1}{2}$; au lancer numéro 2, la probabilité vaut $\frac{1}{4}$; au lancer numéro 3, la probabilité vaut $\frac{1}{8}$; ...au lancer numéro n, la probabilité vaut $\frac{1}{2^n}$.

La distribution est donc oblique à droite.

♡ **Exercice 166 : statistiques descriptives** (4 fois 5 minutes)

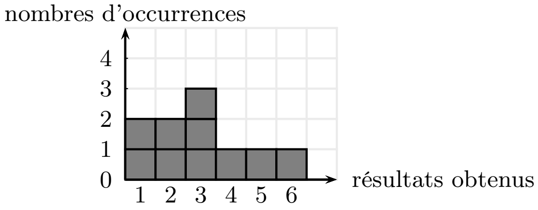
1. Voici les résultats obtenus en jetant un dé non pipé.

lancé numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
numéro obtenu	2	3	3	1	3	1	6	4	2	5

Dessiner l'histogramme associé et déterminer les paramètres de position et de dispersion.

Correction

Histogramme



Paramètres de position

moyenne $= 3$ médiane $= 3$ mode $= 3$

Paramètres de dispersion

étendue $= 5$ variance $= \frac{12}{5}$ écart type $= \sqrt{\frac{12}{5}}$

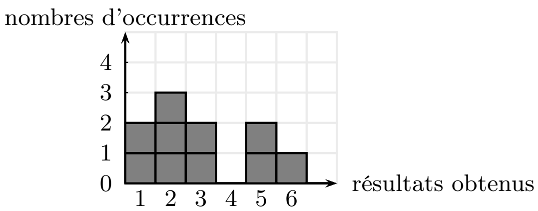
2. Voici les résultats obtenus en jetant un dé non pipé.

lancé numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
numéro obtenu	5	6	2	1	1	5	3	2	2	3

Dessiner l'histogramme associé et déterminer les paramètres de position et de dispersion.

Correction

Histogramme



Paramètres de position

moyenne $= 3$ médiane $= 2.5$ mode $= 2$

Paramètres de dispersion

étendue $= 5$ variance $= \frac{14}{5}$ écart type $= \sqrt{\frac{14}{5}}$

3. Voici les résultats obtenus en jetant un dé non pipé.

lancé numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
numéro obtenu	2	1	5	6	6	2	4	5	5	4

Dessiner la boîte à moustaches correspondante à ces données.

Correction

On ordonne les données : $1, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6$.

La médiane vaut 4.5.

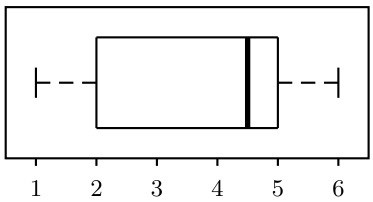
On sépare les données : $\{1, 2, 2, 4, 4\}$ et $\{5, 5, 5, 6, 6\}$.

Le quartile inférieur vaut 2 et le quartile supérieur vaut 5.

La longueur de la boîte vaut 3.

La moustache de gauche à la longueur 1 et celle de droite 1.

Ces longueurs ne font pas plus que 150% de la longueur de la boîte.



4. Voici les résultats obtenus en jetant un dé non pipé.

lancé numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
numéro obtenu	6	3	2	5	4	6	6	3	2	3

Dessiner la boîte à moustaches correspondante à ces données.

Correction

On ordonne les données : $2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6$.

La médiane vaut 3.5.

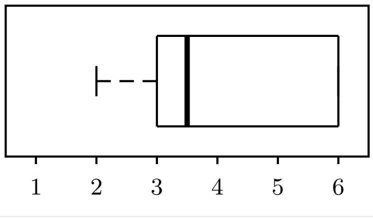
On sépare les données : $\{2, 2, 3, 3, 3\}$ et $\{4, 5, 6, 6, 6\}$.

Le quartile inférieur vaut 3 et le quartile supérieur vaut 6.

La longueur de la boîte vaut 3.

La moustache de gauche à la longueur 1 et celle de droite 0.

Ces longueurs ne font pas plus que 150% de la longueur de la boîte.



Complément de l'exercice 1

8. a) $$\frac{2\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{2}\right)}{2-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{2}+3}{\frac{8-3}{4}} = \frac{\frac{7+6}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{13}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{5} = \frac{26}{5}$$

ou aussi

$$\frac{2\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{2}\right)}{2-\frac{3}{4}} \overset{\text{amplifier par 4}}{=} \frac{2(7+6)}{8-3} = \frac{2\cdot 13}{5} = \frac{26}{5}$$

b) $$1+\frac{3}{5+\frac{1}{2}} = 1+\frac{3}{\frac{10+1}{2}} = 1+3\cdot\frac{2}{11} = \frac{11+6}{11} = \frac{17}{11}$$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 2

3. a) $\sqrt{125} = \sqrt{25\cdot 5} = \sqrt{25}\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

b) Surtout ne pas effectuer $18-8$

On a $\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9\cdot 2} - \sqrt{4\cdot 2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (3-2)\sqrt{2} = \sqrt{2}$

c) $4\sqrt{5} - \cancel{12\sqrt{5}} + \cancel{12\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$

* Avec l'expérience !

4. a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

b) $\dfrac{3+3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\cancel{3}(1+\sqrt{3})}{\cancel{3}\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$

ou aussi

$$\frac{(3+\sqrt{27})\sqrt{27}}{\sqrt{27}\sqrt{27}} = \frac{3\sqrt{27}+27}{27} = \frac{\cancel{3}(\sqrt{27}+9)}{\cancel{3}\cdot 9} = \frac{3\sqrt{3}+9}{9} = \frac{\sqrt{3}+3}{3}$$

c) $\dfrac{3\sqrt{8}+4}{6\sqrt{8}} = \dfrac{6\sqrt{2}+4}{12\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{12\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{12+4\sqrt{2}}{24} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{6}$

ou aussi

$$\frac{(3\sqrt{8}+4)\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}}{6\sqrt{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{3+\frac{4}{\sqrt{8}}}{6} = \frac{3+\frac{4}{2\sqrt{2}}}{6} = \frac{3+\frac{4\sqrt{2}}{4}}{6} = \frac{3+\sqrt{2}}{6}$$

5. a) $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow$ On ne peut pas simplifier la racine avec les carrés ! Toutefois $\sqrt{a^2b^2} = ab$ si $a, b \geq 0$

Ici, c'est une multiplication

b) $(3\sqrt{5}-2)(3\sqrt{5}+2)$
$= 9\cdot 5 - 4 = 41$

c) $(2+\sqrt{2})^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2}$

Ceci est le double produit qu'il ne faut pas oublier !

$(a+b)^2 = a^2 + \underbrace{2ab}_{\text{double produit}} + b^2$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 56

1. **Seul le calcul peut décider** :

   1. On cherche γ à l'aide du théorème du sinus.

$$\frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b} \iff \sin(\gamma) = 1$$

   Il y a un seul angle (entre 0° et 180°) dont le sinus vaut 1 : c'est un angle droit. Donc $\gamma = 90°$.

   2. On cherche a à l'aide du théorème du cosinus.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \iff a^2 - 2\sqrt{3}\,a + 3 = 0 \overset{\text{id. rem. car } \Delta = 0}{\iff} a = \sqrt{3}$$

Ainsi, il n'y a qu'un seul triangle et il est rectangle : on peut donc maintenant aussi utiliser les formules valables dans les triangles rectangles (Pythagore ou «cos-adj-hyp»).

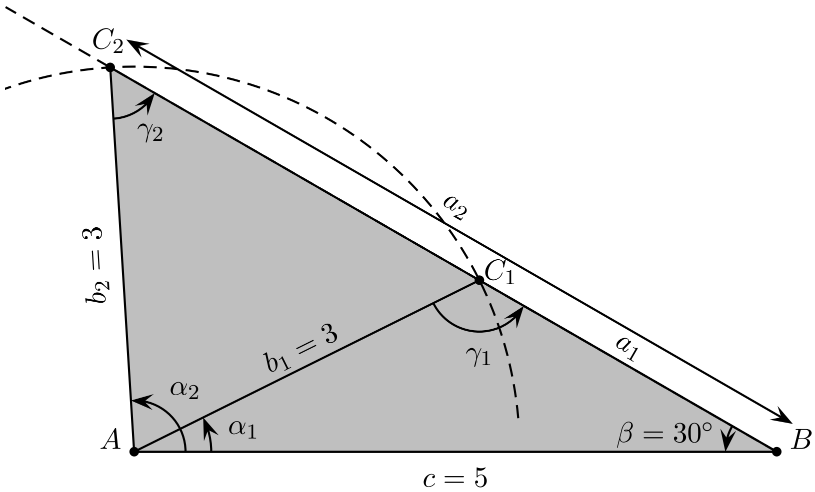
Si, on a d'abord trouvé γ, on trouve a grâce à Pythagore : $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

On aurait aussi pu trouver a grâce à «cos-adj-hyp».

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \iff a = c\cos(\beta) \iff a = 2\cos(30°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

On trouve α grâce à la somme des angles : $\alpha + \beta = 90°$ car $\gamma = 90°$. Donc $\alpha = 90° - \beta = 60°$.

3. La construction ci-dessous montre très clairement qu'il y a exactement deux triangles.



On peut utiliser le théorème du cosinus ou celui du sinus.

La seule possibilité avec théorème du cosinus est $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\cos(\beta)$.
C'est une équation du deuxième degré en a, ce qui explique pourquoi on va trouver deux valeurs de a en utilisant la formule de Viète (le faire pour s'entrainer !).

Mais comme le vrai piège provient du théorème du sinus, cherchons γ à l'aide du théorème du sinus.

$$\frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b} \implies \sin(\gamma) = \frac{5}{6}$$

La touche $\boxed{\sin^{-1}}$ de la calculatrice ne donne que l'angle aigu $\gamma_2 \cong 56.443°$. L'autre angle, qui est obtus, est $\gamma_1 = 180° - \gamma_2 \cong 123.557°$.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 86

De la contrainte, on en déduit que $y = 36 - x$, ainsi on peut écrire la fonction à une variable.

$$P(x, y) = xy = x(36 - x) = -x^2 + 36x$$

Donc la fonction à optimiser est $P(x) = -x^2 + 36x$, avec $x \in [0, 36]$.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 87

De la contrainte, on en déduit que $y = 36 - x$, ainsi on peut écrire la fonction à une variable.

$$S(x, y) = x^2 + y^2 = x^2 + (36 - x)^2 = 2x^2 - 72x + 1296$$

Donc la fonction à optimiser est $S(x) = 2x^2 - 72x + 1296$, avec $x \in [0, 36]$.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 154

OB6 **Factorisations**
polynôme de degré 2
résolution d'équations

Pour trouver la fonction p, on utilise le fait qu'on voit les zéros de p qui sont -2 et 7, donc

$$p(x) = a(x+2)(x-7)$$

On trouve a en regardant l'image en 0.

$$p(0) = 6 \Longleftrightarrow a \cdot (-14) = 6 \Longleftrightarrow a = -\frac{3}{7}$$

Donc $p(x) = -\frac{3}{7}(x+2)(x-7)$, et on distribue.

$$p(x) = -\tfrac{3}{7}(x+2)(x-7) = -\tfrac{3}{7}(x^2 - 5x - 14) = -\tfrac{3}{7}x^2 + \tfrac{15}{7}x + 6$$

OB6 **Factorisations**
polynôme de degré 2
résolution d'équations

Pour trouver la fonction q, on utilise le fait qu'on connait le sommet de la parabole $S(4;0)$. Donc

$$q(x) = a(x-4)^2 + 0$$

La demi-courbure a vaut $a = \dfrac{\text{déplacement vertical depuis le sommet}}{\text{déplacement horizontal depuis le sommet, au carré}} = \dfrac{6}{4^2} = \dfrac{3}{8}$.

On peut aussi trouver a en regardant l'image en 0.

$$q(0) = 6 \Longleftrightarrow a \cdot 16 = 6 \Longleftrightarrow a = \frac{3}{8}$$

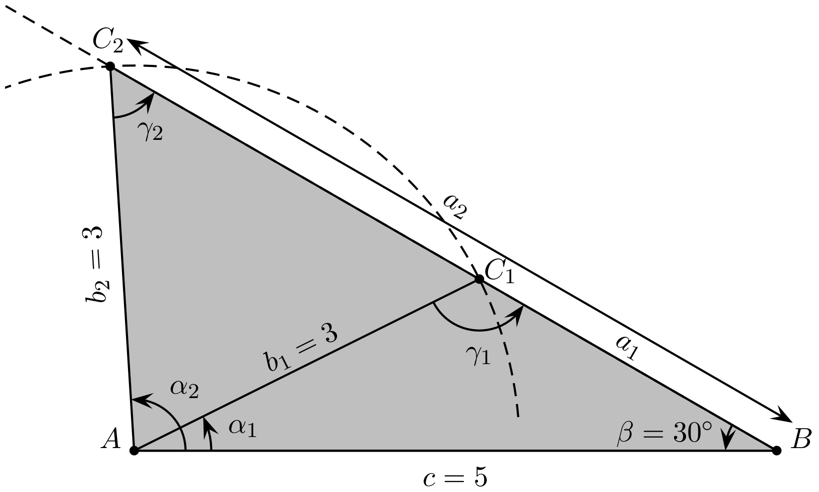
Donc $q(x) = \frac{3}{8}(x-4)^2$, et on distribue en utilisant l'identité remarquable.

$$q(x) = \tfrac{3}{8}(x-4)^2 = \tfrac{3}{8}(x^2 - 8x + 16) = \tfrac{3}{8}x^2 - 3x + 6$$

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 56

3. La construction ci-dessous montre très clairement qu'il y a exactement deux triangles.

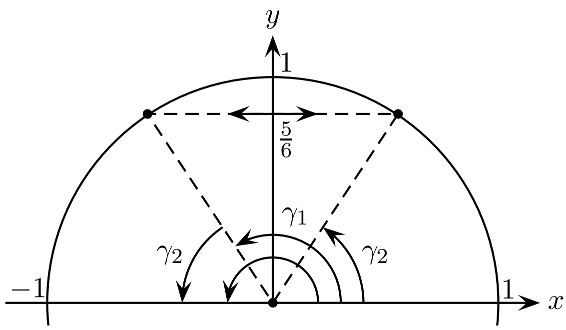


Cherchons γ à l'aide du théorème du sinus.

$$\frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\beta)}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin(\gamma) = \frac{5}{6}$$

La touche $\boxed{\sin^{-1}}$ de la calculatrice ne donne que l'angle aigu $\gamma_2 \cong 56.443°$. L'autre angle, qui est obtus, est $\gamma_1 = 180° - \gamma_2 \cong 123.557°$.

Il y a deux angles qui ont le même sinus.
L'addition de ces deux angles vaut 180°.



Pour terminer l'exercice, on trouve les angles α_1 et α_2 grâce à la somme des angles

$$\alpha_1 = 180° - \beta - \gamma_1 \cong 26.443° \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 180° - \beta - \gamma_2 \cong 93.557°$$

Puis, on trouve les longueurs des côtés a_1 et a_2 grâce au théorème du cosinus ou du sinus.
Le théorème du sinus donne $a = 6\sin(\alpha)$. Le théorème du cosinus donne

$$a_1 = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\,\cos(\alpha_1)} \cong 2.672 \quad \text{et} \quad a_2 = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\,\cos(\alpha_2)} \cong 5.988$$

retour à la résolution

Complément de l'exercice 86

Rappelons que la fonction à optimiser est $P(x) = -x^2 + 36x$ sur le domaine d'intérêt $[0, 36]$.

P est une fonction quadratique dont le graphe est une parabole orientée vers le bas (car sa demi-courbure vaut -1).
Donc le produit est maximal pour $x = \dfrac{-36}{-2} = 18$.

Un minimum peut se produire au bord du domaine d'intérêt, donc en $x = 0$ ou en $x = 36$. Ces deux valeurs de x correspondent à un minimum, car dans les deux cas le produit est nul.

$\boxed{\text{retour à la résolution}}$

Complément de l'exercice 87

Rappelons que la fonction à optimiser est $S(x) = 2x^2 - 72x + 1296$ sur le domaine d'intérêt $[0, 36]$

S est une fonction quadratique dont le graphe est une parabole orientée vers le haut (car sa demi-courbure vaut 2).
Donc la somme des carrés est minimale pour $x = \dfrac{72}{4} = 18$. La somme des carrés minimale est $S(18) = 2 \cdot 18^2 - 72 \cdot 18 = 324$ (plus facile à calculer avec la fonction à deux variables).

Un maximum peut se produire au bord du domaine d'intérêt, donc en $x = 0$ ou en $x = 36$. Ces deux valeurs de x correspondent à un maximum, car dans les deux cas la somme des carrés vaut 1296 ($S(0) = 1296$ et $S(36) = 2 \cdot 36^2 - 72 \cdot 36 = 1296$ (plus facile à calculer avec la fonction à deux variables)).

retour à la résolution

Complément de l'exercice 154

La fonction à optimiser est la longueur du segment vertical donnée par

$$l(x) = p(x) - q(x) = \left(-\tfrac{3}{7}x^2 + \tfrac{15}{7}x + 6\right) - \left(\tfrac{3}{8}x^2 - 3x + 6\right) = -\tfrac{3\cdot 8+3\cdot 7}{7\cdot 8}x^2 + \tfrac{15+3\cdot 7}{7}x = -\tfrac{45}{56}x^2 + \tfrac{36}{7}x$$

Le domaine d'intérêt est $[1,5]$.

retour à la résolution plus d'indications

Complément de l'exercice 154

Rappelons que la fonction à optimiser est $l(x) = -\frac{45}{56}x^2 + \frac{36}{7}x$ sur le domaine d'intérêt $[1, 5]$.

La fonction l est quadratique. Son graphe est une parabole orientée vers le bas (car sa demi-courbure est négative). Donc la longueur est maximale pour

$$x = \frac{-\frac{36}{7}}{2 \cdot \frac{-45}{56}} = \frac{36}{7} \cdot \frac{56}{2 \cdot 45} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 9}{7} \cdot \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{16}{5}$$

La longueur maximale est $l(\frac{16}{5}) = \frac{288}{35}$.

Un minimum peut se produire au bord du domaine d'intérêt, donc en $x = 1$ ou en $x = 5$. Il est clair sur le schéma que le minimum arrive en $x = 1$. La longueur minimale vaut $\frac{243}{56}$.

retour à la résolution